几何不等式在中国

主编 单墫

江苏教育出版社

几何不等式

在中国

主　编　单　墫

副主编　陈　计　张　垚

　　　　杨世国

江　苏　教　育　出　版　社

几何不等式在中国

单 墫 主编
责任编辑 王建军

出 版：江 苏 教 育 出 版 社
（南京中央路165号，邮政编码：210009）
经 销：江 苏 省 新 华 书 店
照 排：南京理工大学激光照排公司
印 刷：金 坛 教 学 印 刷 厂
（金坛市江南路1号，邮政编码：213200）

开本850×1168毫米 1/32 印张14.375 插页1 字数353,600
1996年9月第1版 1996年9月第1次印刷
印数1－2,000册

ISBN 7－5343－2810－1

G·2541 定价：13.40元

序

几何不等式是一个魅力无穷的数学分支。

近二十多年来，几何不等式的研究蓬勃发展，速度之快令人吃惊。1969 年，O. Bottema 等人对到那时为止的成果作了一个很好的总结，搜集了 400 多个平面几何中的不等式，出了一本《几何不等式》，中译本（单墫译，北京大学出版社 1991 年出版）仅 180 页。而 1988 年，D. Mitrinović等所编的《几何不等式的新进展》，已经是一本包含 3000 多个不等式的大部头的著作（1991 年，陈计与 D. Mitrinović等写的《补遗》又增添了 1987—1990 年中出现的 147 个不等式）。

我国几何不等式的研究在 80 年代走向高潮。常庚哲先生、彭家贵先生等介绍了 Pedóe 不等式并作了种种推广。张景中先生、杨路先生不仅研究平面问题，而且对高维空间的几何不等式作了开拓性的工作。笔者在 1980 年写了一本通俗的小册子《几何不等式》（上海教育出版社出版），起了一点“煽风点火”的作用。近十几年来，国内几何不等式的文章举不胜举，其中以陈计先生的工作最为突出，无论是质量，还是数量，在国内外都居领先地位。

为了交流成果，继续前进，1994 年 12 月，由中国科学院成都分院与南京师范大学等单位联合在南京师范大学举办了首届全国几何不等式会议。会上宣读了数十篇研究论文，经过整理，汇编成这本《几何不等式在中国》。除会议交流的论文外，本书的第Ⅱ编还收集了一批有较大影响的论文，又有一个较详细的文献索引，可供参考。由于篇幅所限，很多好文章不能不割爱，收入的文章有些也只能摘要刊载。希望将来能出一本更加完整的集子，更好地反映国

内几何不等式研究的全貌。

从这本论文集可以看出，无论平面或者高维的几何不等式，我国都有深入的研究。前者可以陈计、王振、李文志、石世昌、陈胜利、刘健等先生的文章为代表，后者可以张景中、杨路、张垚、杨世国、苏化明、左铨如、毛其吉、冷岗松等先生的文章为代表。这些工作或技巧精湛，或思想新颖，其中有不少深刻的结果，已经引起国内外数学同行的关注。

几何不等式这一数学分支，不仅自身有众多的问题，而且其他数学分支，特别是组合几何，也不断产生出涉及几何不等式的问题。这持续涌现出的问题，标志着几何不等式的研究方举未艾。这本论文集是对国内几何不等式研究的第一次总结，我们相信这本论文集的出版一定会将几何不等式的研究推向新的高潮。

非常感谢江苏教育出版社与王建军编辑，由于他们的支持与努力，这本论文集得以及早地问世。

单 墫

1995 年 12 月

目　　录

第Ⅰ篇

第Ⅱ篇

第 I 篇

有限点集的一类组合几何不等式

杨 路 曾振柄

中国科学院成都计算机应用研究所(610041)

Heilbronn 问题是组合几何的一个最优化问题. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是平面上的 $n(n\geqslant 3)$ 个点，定义

$$(p_1p_2\cdots p_n)=\min\{\text{Area}(p_ip_jp_k)\mid 1\leqslant i<j<k\leqslant n\}.$$

设 K 是平面上的凸集，定义

$$H_n(K)=\frac{1}{\text{Area}(K)}\sup\{(p_1p_2\cdots p_n)\mid p_1, p_2, \cdots, p_n\in K\},$$

数 $H_n(K)$ 称为 K 的 Heilbronn 数，而满足

$$\frac{(p_1p_2\cdots p_n)}{\text{Area}(K)}=H_n(K)$$

的图形 $p_1p_2\cdots p_n$ 称为 K 中的 n 个点的 Heibronn 分布.

1950 年，Heilbronn 猜测存在常数 c，使得

$$H_n<\frac{c}{n^2}.$$

这一猜测后来为 J. Komlós 等人所否定. 他们证明存在常数 c，满足

$$\frac{c(\log n)}{n^2}<H_n.$$

J. Komlos 等在 1981 年获得 H_n 的上界：

$$H_n < \frac{c}{n^\mu},$$

这里 c 是常数，$\mu = \frac{8}{7} - \varepsilon = 1.1428\cdots - \varepsilon, \varepsilon > 0$.

关于 Heilbronn 问题另一方面的工作是给定凸集 K 和较小的自然数 n，计算 $H_n(K)$ 的准确值并找出相应的 Heilbronn 分布. M. Goldberg 在 1972 年提出关于正方形的 Heilbronn 数和 Heilbronn 分布的若干猜想，它们的大部分到现在还没有被证明或否定. 1979 年以来，杨、张、曾* 等人研究了 Goldberg 的猜测和正方形、三角形、圆盘等凸集的 Heilbronn 数，获得了一些结果. 这些结果包括：

定理 1 设□表示正方形，则

$$H_5(\square) = \frac{\sqrt{3}}{9}, H_6(\square) = \frac{1}{8}.$$

定理 2 设△表示三角形，则

$$H_5(\triangle) = 3 - 2\sqrt{2}, H_6(\triangle) = \frac{1}{8}.$$

定理 3 设 D 是圆盘，则

$$H_5(D) = \frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5}, H_6(D) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$H_7(D) = \frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}.$$

图 1—7 分别表示正方形和三角形内 $n=5,6$ 个点的 Heilbronn 分布. M. Goldberg 猜测当 $n<8$ 时，正方形的最大内接正仿射正 n 边形是 Heibronn 分布。定理 1 说明 Goldberg 的猜测当 $n=5$ 是错的；当 $n=6$ 是对的；当 $n=7$，由 Goldberg 的猜想有

$$H_7(\square) = 0.0794\cdots,$$

---

* 杨为杨路，张为张景中，曾为曾振柄，下同. ——编者

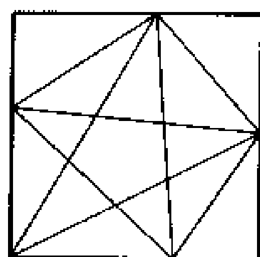


图 1

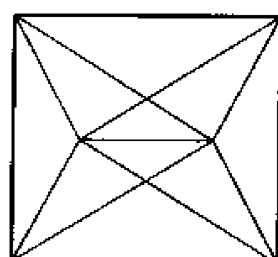


图 2

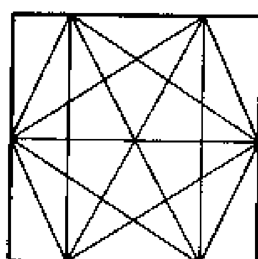


图 3

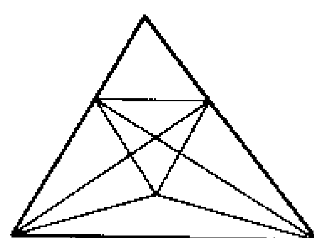


图 4

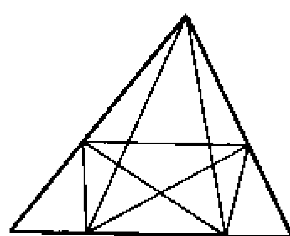


图 5

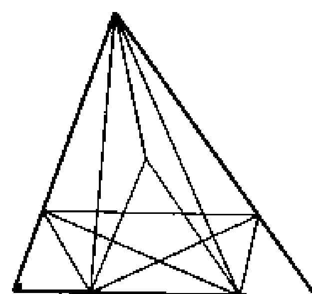


图 6

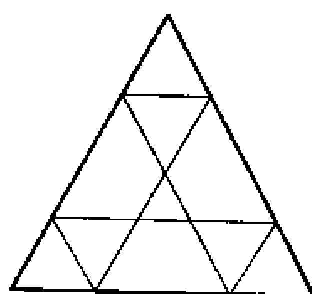


图 7

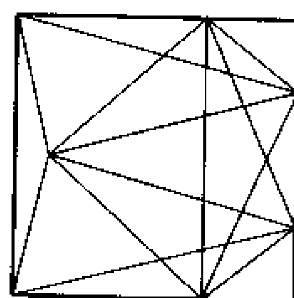


图 8

而图 8 给出的图形则证明了

$$H_7(\square)\geqslant\frac{1}{12}>0.0794\cdots$$

这说明正方形的最大内接仿射正七边形不是 Heilbronn 分布。圆盘内 n 个点的 Heilbronn 分布，当 $n<8$ 时是圆内接正 n 边形，而当 $n=8$ 时圆内接正 n 边形不是 Heilbronn 分布。如图 9、10，设

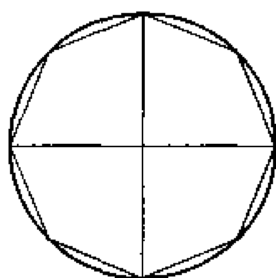


图 9

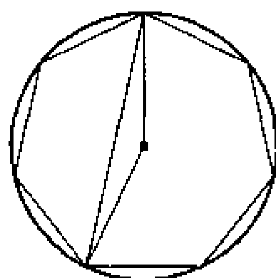


图 10

$p_1p_2\cdots p_8$ 是单位圆内接正八边形，$q_1q_2\cdots q_7$ 是单位圆内接正七边形，q_8 是圆心，则有

$$(p_1p_2\cdots p_8)=\frac{\sqrt{2}-1}{2\pi},(q_1q_2\cdots q_8)=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\pi}.$$

关于 Heilbronn 数 $H_n(K)$ 的上界，杨、Dress、曾等证明下面的结果.

定理 4 设 K 是平面任一凸集，则

$$H_5(K)\leqslant\frac{5-\sqrt{5}}{10},H_6(K)\leqslant\frac{1}{6},$$

$$H_7(K)\leqslant\frac{1}{9},$$

等号成立的条件当 $n=5,6$ 时，K 分别是仿射正五边形和仿射正六边形；当 $n=7$ 时，K 如图 11 所示。

由 Blaschke 关于仿射微分几何的一个结果，可得下面的定

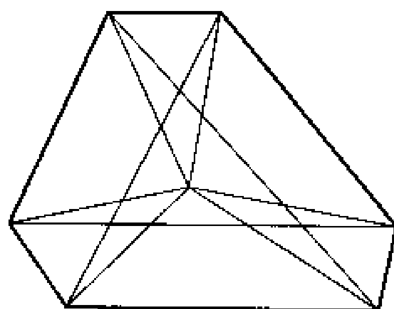


图 11

理.

定理 5 设 K 是平面任一凸集,则

$$H_3(K) \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{4\pi},$$

等号成立当且仅当 K 是椭圆.

我们猜测,下面的不等式

$$H_4(K) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{6}-1}, H_5(K) \geqslant 3-2\sqrt{2},$$

对于平面任一凸集成立.

Heilbronn 数的计算可化为下面的最优化问题. 设 $p_1p_2\cdots p_m$ 是平面上(或者平面上的凸集 K 内)的一个凸 m 边形, $p_{m+1}, \cdots, p_{m+l}$ 是 $p_1p_2\cdots p_m$ 中的 l 个点($m\geqslant 3, l\geqslant 0$),计算

$$h(m,l) = \frac{1}{\text{Area}(p_1p_2\cdots p_m)} \sup(p_1p_2\cdots p_{m+1}\cdots p_{m+l}).$$

这一问题已获得的非平凡结果包括在定理 6 和定理 7.

定理 6 设 $p_1p_2\cdots p_m$ 是平面上凸 m 边形, $p_{m+1}, \cdots, p_{m+l}$ 是 $p_1p_2\cdots p_m$ 中的 l 个点. $h(m,l)$ 定义如上. 则

$$h(3,2) = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}, h(3,3) = \frac{2}{11+3\sqrt{5}},$$

$$h(4,1)=\frac{1}{2+2\sqrt{2}},h(4,2)=\frac{1}{8},$$

$$h(5,1)=0.14860979\cdots,h(6,1)=\frac{1}{9}.$$

其中,$h(5,1)$是方程 $11\mu^3+10\mu^2+5\mu-1=0$ 的唯一实根.

定理 7 设 $h(m,l)$如上定义,则

$$h(m,0)=\frac{4}{m}\sin^2\frac{\pi}{m}$$

对 $3\leqslant m\leqslant 7$ 成立.

我们猜测定理 7 对所有 $m\geqslant 8$ 也是成立的.

定理 6 和定理 7 中的结果,$h(4,1)$是马援、王振得到的.$h(3,2)$,$h(4,2)$,$h(5,1)$,$h(6,1)$以及$h(m,0)$是由杨、张、Dress、曾等证明的.图 12—15 给出它们相应的最佳图形.

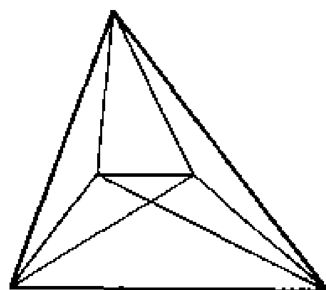


图 12

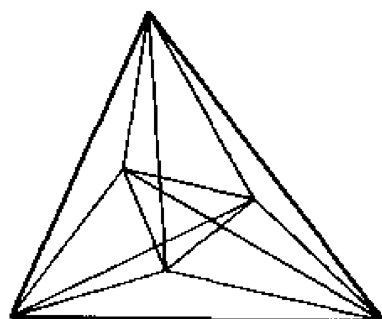


图 13

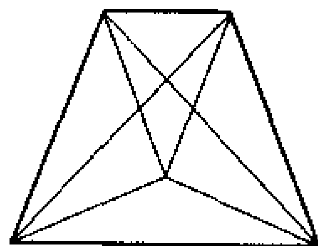


图 14

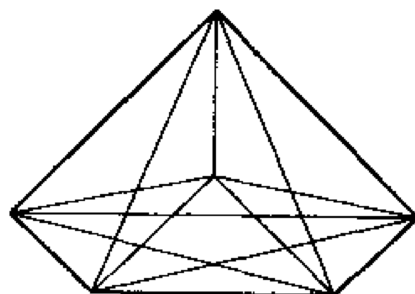


图 15

证明与 Heilbronn 问题有关的几何不等式的一个有效方法是图形的扰动.下面我们用扰动的方法来计算 $h(3,3)$ 并寻找 $h(3,3)$ 对应的最佳图形,我们要证明:

定理 8 设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形, p_4,p_5,p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点. 如果

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{\text{Area}(p_1p_2p_3)}=h(3,3)$$

成立,则必可将 p_4,p_5,p_6 重新编号使得

$$\begin{aligned}\text{Area}(p_1p_2p_6)&=\text{Area}(p_2p_3p_4)=\text{Area}(p_1p_3p_5)\\&=\text{Area}(p_2p_4p_5)=\text{Area}(p_3p_5p_6)\\&=\text{Area}(p_4p_5p_6)=(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)\end{aligned}$$

成立.

为表达方便,我们记

$$\text{Area}(p_ip_jp_k)=(p_ip_jp_k).$$

如果某一三角形 $p_ip_jp_k$ 满足

$$(p_ip_jp_k)=(p_1p_2\cdots p_6),$$

称 $p_ip_jp_k$ 是紧的(tight).

证明 易知 $h(3,3)\geqslant\frac{1}{9}$, 只要取 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5,p_6 分别为 $(0,0),(1,0),(0,1),\left(\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{1}{9},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{4}{9},\frac{1}{9}\right)$, 即得

$$(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)=\frac{1}{9}(p_1p_2p_3).$$

设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形, p_4,p_5,p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点. 如果通过 p_4,p_5,p_6 的三条直线中有两条,例如 p_4p_5, p_4p_6, 都和 $p_1p_2p_3$ 的某两边,例如 p_1p_2, p_1p_3 相交,则下面四者总有一个成立:

(1) $p_5,p_6\in p_1p_2p_4$;

(2) $p_5,p_6\in p_1p_3p_4$;

(3) $p_4,p_5\in p_1p_2p_6$;

(4) $p_4, p_5 \in p_1p_3p_6$.

而每一种情况都使得

$$(p_1p_2p_3) \geqslant 2\min(p_ip_jp_k) + \frac{1}{h(3,2)}\min(p_ip_jp_k)$$

$$=(6+2\sqrt{3})\min(p_ip_jp_k).$$

所以

$$\min(p_ip_jp_k) \leqslant \frac{1}{6+2\sqrt{3}}(p_1p_2p_3) < h(3,3)(p_1p_2p_3).$$

即这时图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 取不到 $h(3,3)$(参见图 16).

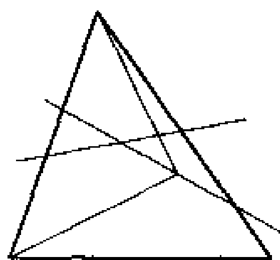


图 16

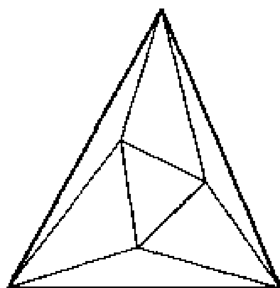


图 17

设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形，p_4, p_5, p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点. 不妨设 p_5p_6 与 p_1p_2、p_1p_3 相交，p_4p_6 与 p_1p_2、p_2p_3 相交，p_4p_5 与 p_1p_3、p_2p_3 相交，如图 17 所示. 注意到，$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ 形成的 20 个三角形中，有 7 个显然不可能是紧的，它们是

$$p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_2p_5, p_1p_3p_4, p_1p_3p_6, p_2p_3p_5, p_2p_3p_6$$

我们欲证，如果

$$\min(p_ip_jp_k) = h(3,3)(p_1p_2p_3)$$

成立，则必然有

Ⅰ. $(p_1p_2p_6) = (p_2p_3p_4) = (p_1p_3p_5) = \min(p_ip_jp_k)$;

为此，反设 $(p_2p_3p_4) > \min(p_ip_jp_k)$，沿 p_1p_4 的延长线作 p_4 的微小移动至 p_4'，使 $(p_2p_3p_4') > \min(p_ip_jp_k)$ 仍成立，则在其它 12 个可

能是紧的三角形中，扰动产生的面积变化如下：

$(p_1p_2p_6)$，$(p_1p_3p_5)$，$(p_1p_5p_6)$，$(p_2p_5p_6)$，$(p_3p_5p_6)$不变；

$(p_1p_4'p_5)>(p_1p_4p_5)$，$(p_1p_4'p_6)>(p_1p_4p_6)$，

$(p_2p_4'p_5)>(p_2p_4p_5)$，$(p_2p_4'p_6)>(p_2p_4p_6)$，

$(p_3p_4'p_5)>(p_3p_4p_5)$，$(p_3p_4'p_5)>(p_3p_4p_6)$，

$(p_4'p_5p_6)>(p_4p_5p_6)$.

这说明扰动后的图形 $p_1p_2p_3p_4'p_5p_6$ 也取到 $h(3,3)$，但其中有可能是紧的三角形必然包括在下面 5 个之中：

$$p_1p_2p_6,\ p_1p_3p_5,\ p_1p_5p_6,\ p_2p_5p_6,\ p_3p_5p_6.$$

注意到 $\max[(p_2p_5p_6),(p_3p_5p_6)]>(p_4p_5p_6)$，所以 $p_2p_5p_6$，$p_3p_5p_6$ 中最多有一个紧的，不妨设

$$(p_2p_5p_6)>\min(p_ip_jp_k),$$

则 $p_1p_2p_3p_4'p_5p_6$ 中可能是紧的三角形有 4 个：

$$p_1p_2p_6,\ p_1p_3p_5,\ p_1p_5p_6,\ p_3p_5p_6.$$

这 4 个三角形中与 p_2 关联的只有 $p_1p_2p_6$. 再作 p_2 的微小移动 p_2' 使 $(p_1p_2'p_6)=(p_1p_2p_6)$，即 $p_2p_2' /\!/ p_1p_6$，则

$$(p_1p_2'p_3p_4'p_5p_6)\geqslant(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)\geqslant(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)$$

成立，而且

$$(p_1p_2'p_3)<(p_1p_2p_3).$$

这导致

$$\frac{(p_1p_2'p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2'p_3)}>\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}=h(3,3)$$

矛盾，这样就证明了断言 1.

注意到下面的三个关系式总是成立的：

$$\max[(p_1p_4p_5),(p_2p_4p_5)]>(p_6p_4p_5)\geqslant\min(p_ip_jp_k);$$

$$\max[(p_2p_5p_6),(p_3p_5p_6)]>(p_4p_5p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k);$$

$$\max[(p_3p_4p_6),(p_1p_4p_6)]>(p_5p_4p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k).$$

在组合不变的意义下，这三个关系式可以分解成下面两种情况：

Ⅱ. $(p_1p_4p_5)\geqslant(p_2p_4p_5),(p_1p_4p_5)>m(p_ip_jp_k),$

$(p_2p_5p_6)\geqslant(p_3p_5p_6),(p_2p_5p_6)>m(p_ip_jp_k),$

$(p_3p_4p_6)\geqslant(p_1p_4p_6),(p_3p_4p_6)>m(p_ip_jp_k);$

Ⅱ′. $(p_1p_4p_5)\geqslant(p_2p_4p_5),(p_1p_4p_5)>m(p_ip_jp_k),$

$(p_3p_5p_6)\geqslant(p_2p_5p_6),(p_3p_5p_6)>m(p_ip_jp_k),$

$(p_3p_4p_6)\geqslant(p_1p_4p_6),(p_3p_4p_6)>m(p_ip_jp_k).$

我们往下证，如果

$$\min(p_ip_jp_k)=h(3,3)(p_1p_2p_3)$$

成立，则Ⅱ′实际上不可能出现，所以Ⅱ成立. 为此反设Ⅱ′成立，这时因$(p_1p_4p_5)\geqslant(p_2p_4p_5)$，有

$$\angle p_2p_1p_5+\angle p_4p_5p_1\leqslant\pi,$$

$$\angle p_6p_1p_5+\angle p_4p_5p_1<\pi.$$

所以

$$(p_1p_5p_6)>(p_1p_4p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k).$$

同理可得

$$(p_3p_4p_5)>(p_3p_5p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k).$$

所以，在 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 形成的 20 个三角形中，已知有下面的 12 个肯定不是紧的：

$p_1p_2p_3, p_1p_2p_4, p_1p_2p_5, p_1p_3p_4, p_1p_3p_6, p_2p_3p_5, p_2p_3p_6,$

$p_1p_4p_5, p_3p_5p_6, p_3p_4p_6, p_1p_5p_6, p_3p_4p_5;$

20 个三角形中有 3 个肯定是紧的：

$p_1p_2p_6, p_2p_3p_4, p_1p_3p_5;$

其余的 5 个三角形是：

$p_1p_4p_6, p_2p_4p_5, p_2p_4p_6, p_2p_5p_6, p_4p_5p_6.$

作 p_4 的微小移动 $p_4'\in p_3p_4p_5, p_4p_4'\,/\!/\,p_6p_5$，但 $p_4'p_5$ 不平行于 p_3p_1，使得已知的 12 个不是紧的三角形保持不紧. 其余 8 个三角形中没有改变的是

$p_1p_2p_6, p_1p_3p_5, p_2p_5p_6.$

面积有改变的五个三角形有：

$$(p_1p_4'p_6)>(p_1p_4p_6),(p_2p_4'p_5)>(p_2p_4p_5),$$
$$(p_2p_4'p_6)>(p_2p_4p_6),(p_4'p_5p_6)=(p_4p_5p_6),$$
$$(p_2p_3p_4')\geqslant(p_2p_3p_4).$$

最后一个式子是因为$(p_3p_5p_6)\geqslant(p_2p_5p_6)$，所以

$$\angle p_5p_6p_2+\angle p_6p_2p_3\geqslant\pi,$$
$$\angle p_4'p_4p_2+\angle p_4p_2p_3\geqslant\pi.$$

特别地，如果严格不等式$(p_3p_5p_6)>(p_2p_5p_6)$成立，则导致

$$(p_2p_3p_4')>(p_2p_3p_4),$$
$$\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}>\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}=h(3,3).$$

与断言 I 矛盾.

如果$(p_3p_5p_6)=(p_2p_5p_6)>\min(p_ip_jp_k)$成立，则

$$(p_2p_3p_4')=(p_2p_3p_4).$$

这时，扰动得到的图形 $p_1p_2p_3p_4'p_5p_6$ 满足

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}\geqslant\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}\geqslant h(3,3),$$

而且其中最多只有下面的四个三角形可能是紧的：

$$p_1p_2p_6,p_2p_3p_4',p_1p_3p_5,p_4'p_5p_6.$$

注意，扰动 p_4'满足 $p_4'p_6$ 不平行于 p_3p_1，所以，或者

$$\angle p_4'p_6p_1+\angle p_6p_1p_3>\pi$$

成立，或者

$$\angle p_6p_4'p_1+\angle p_4'p_3p_1>\pi$$

成立. 作 p_5 的微小移动 $p_5'\in p_3p_4'p_5$ 或 $p_1p_5p_6$，$p_5p_5'\,/\!/\,p_4'p_6$，则相应地有

$$\angle p_5p_5'p_1+\angle p_5p_1p_3>\pi,$$

或者

$$\angle p_5'p_5p_3+\angle p_5p_3p_1>\pi,$$

总有

$$(p_1p_3p_5')>(p_1p_3p_5),(p_4'p_5'p_6)=(p_4'p_5p_6).$$

当 p_5 的扰动足够小时，$p_1p_2p_3p_4'p_5p_6$ 中原来不是紧的三角形保持不紧. 所以

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}\geqslant\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}\geqslant h(3,3)$$

成立，也与断言 I 矛盾.

以上证明了如果图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 满足

$$\min(p_ip_jp_k)=h(3,3)\cdot(p_1p_2p_3),$$

则断言 II 在组合不变的意义下成立. 由 II 立即可得

$$\angle p_2p_1p_5+\angle p_4p_5p_1\leqslant\pi,$$
$$\angle p_6p_1p_5+\angle p_4p_5p_1<\pi,$$

所以

$$(p_1p_5p_6)>(p_1p_4p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k),$$

同理

$$(p_2p_4p_6)>(p_2p_4p_5)\geqslant\min(p_ip_jp_k),$$
$$(p_3p_4p_5)>(p_3p_5p_6)\geqslant\min(p_ip_jp_k).$$

我们接着证明，断言 II 保证下列两式成立.

III. $(p_4p_5p_6)=\min(p_ip_jp_k)$；

IV. $p_1p_4p_6,p_2p_4p_5,p_3p_5p_6$ 3 个三角形中至少有两个紧的.

观察 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 的 20 个三角形，已经知道除下面 7 个三角形以外都不可能是紧的：

$$p_1p_2p_6,p_2p_3p_4,p_1p_3p_5,p_1p_4p_6,p_2p_4p_5,p_3p_5p_6,p_4p_5p_6.$$

如果 $(p_4p_5p_6)>\min(p_ip_jp_k)$ 成立，则沿 p_2p_4 的延长线作 p_4 的微小移动 p_4'' 使得图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 的已知 13 个不是紧的三角形保持不紧，并且保持不等式

$$(p_4''p_5p_6)>(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)$$

成立. 注意到 $p_1p_2p_6,p_1p_3p_5,p_3p_5p_6$ 在扰动之后不变，而

$(p_2p_3p_4'')>(p_2p_3p_4)$，$(p_1p_4''p_6)>(p_1p_4p_6)$，$(p_2p_4''p_5)>(p_2p_4p_5)$，于是扰动得到的图形 $p_1p_2p_3p_4''p_5p_6$ 满足

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4''p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)} \geqslant \frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)} = h(3,3).$$

与断言Ⅰ矛盾. 断言Ⅲ得证.

现在证明断言Ⅳ成立. 先证明 $p_1p_4p_6$，$p_2p_4p_5$，$p_3p_5p_6$ 三者至少有一个是紧的. 不然，如果 p_5p_6 不平行于 p_3p_2，p_4p_6 不平行于 p_3p_1，或者 p_4p_5 不平行于 p_2p_1 有一个成立，例如 p_5p_6 不平行于 p_3p_2 成立，则由Ⅱ有

$$\angle p_6p_5p_3 + \angle p_5p_3p_2 > \pi.$$

作 p_4 的微小移动 $p_4' \in p_2p_4p_6$，$p_4'p_4 /\!/ p_6p_5$，使图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 中原来不是紧的三角形(它们是除 $p_1p_2p_6$，$p_2p_3p_4$，$p_1p_3p_5$，$p_4p_5p_6$ 以外的所有三角形)保持不紧，则有

$$\angle p_4'p_4p_3 + \angle p_4p_3p_2 > \pi,$$

$$(p_2p_3p_4') > (p_2p_3p_4).$$

以及

$$(p_4'p_5p_6) = (p_4p_5p_6).$$

这导致

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)} \geqslant \frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)} = h(3,3).$$

与断言Ⅰ矛盾. 如果 $p_5p_6 /\!/ p_3p_2$，$p_4p_6 /\!/ p_3p_1$，$p_4p_5 /\!/ p_2p_1$ 都成立，则作微小扰动 $p_5' \in p_3p_4p_5$，$p_5p_5' /\!/ p_1p_3$；$p_6' \in p_1p_5p_6$，$p_6p_6' /\!/ p_1p_2$，使图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 中原来不是紧的三角形保持不紧，则有

$$(p_1p_2p_6') = (p_1p_2p_6),\ (p_1p_3p_5') = (p_1p_3p_5),$$

$$(p_4p_5'p_6') > (p_4p_5'p_6) = (p_4p_5p_6).$$

这时

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5'p_6')}{(p_1p_2p_3)} \geqslant \frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)} = h(3,3).$$

与断言Ⅲ矛盾.

以上证明了 $p_1p_4p_6$, $p_2p_4p_5$, $p_3p_5p_6$ 三者至少有一个是紧的，下面继续证明断言Ⅳ. 不妨设

$$(p_3p_5p_6)=\min(p_ip_jp_k),$$

则由断言Ⅱ，

$$(p_2p_5p_6)>(p_3p_5p_6)=\min(p_ip_jp_k),$$

于是

$$\angle p_6p_5p_3+\angle p_5p_3p_2>\pi.$$

如果三角形 $p_1p_4p_6$, $p_2p_4p_5$ 都不是紧的，即

$$(p_1p_4p_6)>\min(p_ip_jp_k),(p_2p_4p_5)>\min(p_ip_jp_k),$$

则作 p_4 的小扰动 $p_4'\in p_2p_4p_6$, $p_4p_4'\parallel p_5p_6$，使图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 中原来不是紧的三角形（它们是除 $p_1p_2p_6$, $p_2p_3p_4$, $p_1p_3p_5$, $p_4p_5p_6$, $p_3p_5p_6$ 以外的所有三角形）保持不紧. 这时因

$$\angle p_4'p_4p_3+\angle p_4p_3p_2>\pi,$$

有

$$(p_2p_3p_4')>(p_2p_3p_4).$$

显然

$$(p_4'p_5p_6)=(p_4p_5p_6).$$

所以

$$\frac{(p_1p_2p_3p_4'p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}\geqslant\frac{(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)}{(p_1p_2p_3)}=h(3,3)$$

与断言Ⅰ矛盾. 所以三角形 $p_1p_4p_6$, $p_2p_4p_5$ 二者之中至少有一个也是紧的. 这样就证明了断言Ⅳ.

断言Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ保证定理 8 成立.

定理 9 设 $p_1p_2p_3$ 是一三角形，p_4, p_5, p_6 是 $p_1p_2p_3$ 中的三点，具有下述性质：

(1) p_4p_6 与 p_2p_1、p_2p_3 相交，p_4p_5 与 p_3p_2、p_3p_1 相交，p_5p_6 与 p_1p_2、p_1p_3 相交；

$$(2)(p_1p_2p_6)=(p_2p_3p_4)=(p_1p_3p_5)$$
$$=(p_2p_4p_5)=(p_3p_5p_6)=(p_4p_5p_6)$$
$$=(p_1p_2p_3p_4p_5p_6).$$

那么

$$(p_1p_2p_3p_4p_5p_6)\leqslant\frac{2}{11+3\sqrt{5}}(p_1p_2p_3)$$

成立.

证明 设 P 表示所有满足 $p_4,p_5,p_6\in p_1p_2p_3$ 和性质(1)、(2)的图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 的集合,则定理 9 的证明归结为解下面的非线性规划:

Ⅰ. $\sup\{\min(p_ip_jp_k)\mid p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P,(p_1p_2p_3)=\text{const.}\}$

注意到如果图 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P$,则(1)、(2)保证除了 $p_1p_2p_6$,$p_2p_3p_4$,$p_1p_3p_5$,$p_2p_4p_5$,$p_3p_5p_6$,$p_4p_5p_6$ 和 $p_1p_4p_6$,$p_3p_4p_5$,$p_3p_4p_6$ 以外的三角形都不是紧的. 设 P_0 表示所有满足 $p_4,p_5,p_6\in p_1p_2p_3$和性质(1)以及下述性质的图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 的集合:

$$(3)(p_1p_2p_6)=(p_2p_3p_4)=(p_1p_3p_5)=(p_2p_4p_5)=(p_3p_5p_6)$$
$$=(p_4p_5p_6),$$
$$(p_1p_4p_6)\geqslant(p_1p_2p_6),(p_3p_4p_5)\geqslant(p_1p_2p_6),(p_3p_4p_6)$$
$$\geqslant(p_1p_2p_6).$$

显然,$P\subset P_0$. 所以,不等式

$$\sup\{\min(p_ip_jp\mid p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P,(p_1p_2p_3)=\text{const}\}$$
$$\leqslant\sup\{(p_1p_2p_6)\mid p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P_0,(p_1p_2p_3)=\text{const}\}$$

成立. 我们将证明上式等号成立. 为此,解非线性规则:

Ⅱ. $\sup\{(p_1p_2p_6)\mid p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P_0,(p_1p_2p_3)=\frac{1}{2}\}.$

设图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6$ 诸点的仿射坐标分别是

$$p_1(0,0),p_2(1,0),p_3(0,1),p_4(u,v),p_5(a,y),p_6(x,a).$$

如图 18 所示:

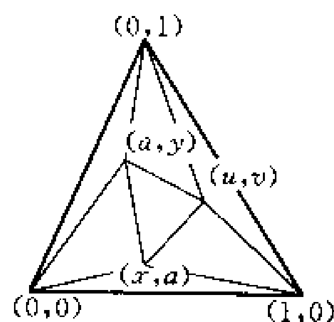


图 18

则上面的非线性规划Ⅱ可以写成

Ⅲ. max a,

$$s.t.\ f_1=u+v+a-1=0,$$

$$f_2=uy+(1-a)v-y-a=0,$$

$$f_3=xy-x-a^2+2a=0,$$

$$f_4=uy+vx-xy-au-av+a^2-a=0,$$

$$g_1=vx-au-a\geqslant 0,$$

$$g_2=-uy+u+av-2a\geqslant 0,$$

$$g_3=vx+(1-a)u-x-a\geqslant 0.$$

从方程组 $f_1=0, f_2=0, f_3=0$ 可以解出

$$u=-\frac{ax-3x-a+2}{x+a-2},$$

$$v=-\frac{2x+a^2-2a}{x+a-2},$$

$$y=\frac{x+a^2-2a}{x},$$

代入 $f_4=0, g_1\geqslant 0, g_2\geqslant 0, g_3\geqslant 0$，则非线性规划Ⅲ可化成下列形式：

Ⅳ. max a

$$s.t.\ f=3x^3-5x^2-3a^2x+5ax+2x-a^3+4a^2-4a=0,$$

$$g_1=(x^2+ax+a^2-2a)(-x-a+2)\geqslant 0,$$

$$g_2=(x^2+a^2x+4ax-5x+2a^3-4a^2-a+2)(-x-a+2)$$
$$\geqslant 0,$$
$$g_3=(3x^2+4ax-5x+2a^2-5a+2)(-x-a+2)\geqslant 0.$$

这个问题的解是

$$a=\frac{2}{11+3\sqrt{5}},x=-\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+2a}.$$

可以验证，这个解相应的图形 $p_1p_2p_3p_4p_5p_6\in P$，所以它也是问题 I 的解. 这证明了定理 9 成立.

最后，我们给出 $h(m,0)$对应的最佳凸 m 边形的一个性质.

定理 10 设 $p_1p_2\cdots p_m$ 是凸 m 边形，满足

$$(p_1p_2\cdots p_m)=h(m,0)\mathrm{Area}(p_1p_2\cdots p_m),$$

则

$$(p_1p_2p_3)=(p_2p_3p_4)=\cdots=(p_mp_1p_2)=(p_1p_2\cdots p_m)(p_ip_jp_k)$$

成立.

证明 记

$$\mathrm{Area}(p_1p_2\cdots p_m)=|p_1p_2\cdots p_m|,$$
$$\min(p_ip_jp_k)=(p_1p_2\cdots p_m).$$

我们断言

I. 对于任何凸 m 边形 $p_1p_2\cdots p_m$，如果

$$(p_ip_jp_k)=(p_1p_2\cdots p_m),$$

则 p_i,p_j,p_k 是 $p_1p_2\cdots p_m$ 的相邻三个顶点.

II. 若凸 m 边形 $p_1p_2\cdots p_m$ 满足

$$(p_1p_2\cdots p_m)=h(m,0)|p_1p_2\cdots p_m|,$$

则

$$(p_ip_{i+1}p_{i+2})=(p_1p_2\cdots p_m),i=1,\cdots,m,$$
$$p_{m+1}=p_1,p_{m+2}=p_2.$$

断言 I 是下述事实的直接推论. 设 p_i,p_j,p_k 不是 $p_1p_2\cdots p_m$ 的

相邻两顶点. 不妨假设 $j>i+1, k>j+1$,则有

$$(p_i p_j p_k) > \min((p_i p_{i+1} p_k), (p_i p_{j+1} p_k)) \geqslant (p_1 p_2 \cdots p_m).$$

断言 Ⅱ 的下述证明适用于 $m\geqslant 6$. 设对某一 i 有

$$(p_i p_{i+1} p_{i+2}) > (p_1 p_2 \cdots p_m),$$

则沿 $p_{i-1}p_{i+2}$ 作 p_{i+1} 的微小移动 p'_{i+1},使

$$(p_i p_{i+1} p_{i+2}) > (p_1 p_2 \cdots p_m).$$

由于

$$(p'_{i+1} p_{i+2} p_{i+3}) \geqslant \min((p_{i+1} p_{i+2} p_{i+3}), (p_{i-2} p_{i+2} p_{i+3}))$$
$$\geqslant (p_1 p_2 \cdots p_m),$$
$$(p_{i+1} p_{i-1} p_i) \geqslant (p_1 p_2 \cdots p_m),$$

所以

$$(p_1 \cdots p_i p'_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m) \geqslant (p_1 p_2 \cdots p_m),$$
$$|p_1 \cdots p_i p'_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m| < |p_1 p_2 \cdots p_m|.$$

这导致

$$\frac{(p_1 \cdots p_i p'_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m)}{|p_1 \cdots p_i p'_{i+1} p_{i+2} \cdots p_m|} > \frac{(p_1 p_2 \cdots p_m)}{|p_1 p_2 \cdots p_m|} = h(m,0)$$

矛盾.

由断言 Ⅰ、Ⅱ,定理 10 成立.

凸多边形的任何相邻三个顶点组成的三角形叫该凸多边形的边缘(peripheral)三角形,凸 m 边形 $p_1p_2\cdots p_m$ 称为等边缘凸 m 边形,如果

$$(p_1 p_2 p_3) = (p_2 p_3 p_4) = \cdots = (p_m p_1 p_2)$$

成立,显然任何仿射正 m 边形都是等边缘凸 m 边形,但 $m>5$ 时反过来不对. 已知,当 $6\leqslant m\leqslant 7$,在所有边缘三角形面积给定的等边缘凸 m 边形中,仿射正 m 边形的面积最小(定理 7). 这一问题对于 $m\geqslant 8$ 尚未解决.

参考文献

[1]Goldberg, M., Maximizing the smallest triangle made by points in a square, Math, Mag. 45 (1972), 135-144.

[2]Komlos, J. et al., On Heilbronn's problem, J. London Math., Soc. (2) 24 (1984), 385-396.

[3]Komlos. J. et al., A lower bound for Heilbronn's problem, J. London Math. Soc., (2) 25 (1982), 13-14.

[4]Moser, W., Problems on extremal properties of a finite set of points, in "Discrete Geometry and Convexity", Ann New York Acad. Sci. 440 (1985), 52-64.

[5]Moser, W & Pach, J., "100 Research Problems in Discrete Geometry", MacGill University, Montreal, Quebec 1993.

[6]Roth, K. F. On a problem of Heilbronn, J. London Math. Soc. 26 (1951), 198-204.

[7]Roth, K. F., On a problem of Heilbronn Ⅰ, Proc. London Math. Soc., 25 (1972), 193-212.

[8]Roth, K. F., On a problem of Heilbronn Ⅱ, Proc. London Math. Soc., 27(1974), 543-549.

[9]Roth, K. F., Estimation of the area of the smallest triangle obtained by selecting three out of points in a disc of unit area, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Math., 24(1973),251-262.

[10]Roth, K. F. Developments in Heilbronn's triangle problem, Advances in Math., 22(1976), 364-385.

[11]Schmidt, W. M., On a problem of Heilbronn, J. London Math. Soc., (2) 4 (1971), 5454-550.

[12]杨路、张景中,正方形内六点问题,数学讲座(2),四川人民出版社,1980,151-171页.

[13]Yang Lu, Zhang Jingzhong, A conjecture concerning six points in a square, in "Mathematical Olympiad in China", Hunan Educational Publishing House 1990.

[14]Yang Lu, Zhang Jingzhong & Zeng Zhenbing, Heibronn problem for

five points, Preprint, International Centre for Theoretical Physics, 1991, IC/91/252.

[15]Yang Lu, Zhang Jingzhong & Zeng Zhenbing, on Goldberg's conjecture: computing the first several Heilbronn numbers, preprint, Universität Bielefeld, 1991 ZiF-Nr. 91/29, SFB-Nr. 91/074

[16]Yang Lu, Zhang Jingzhong & Zeng Zhenbing, On exact valuse of Heibronn numbers for triangular regions, preprint, SFB-Nr, 91/098, Universität Bielefeld, 1991.

[17]杨路、张景中、曾振柄,关于最初几个 Heilbronn 数的猜想和计算,数学年刊 A 辑,第 13 卷(1992)第 4 期,503- 515.

[18]杨路、张景中、曾振柄,关于三角形区域的 Heilbronn 数,数学学报 36 卷(1994)第 5 期,678—689.

[19]Dress, A., Yang, L. & Zeng, Z., Heilbronn problem of six points in a planar convex body, Combinatorics and Graph Theory '95 vol. 1 PP 97-118, World Scientific, 1995.

[20]Yang, L. & Zeng, Z., Heilbronn Problem of seven points in a planar convex body, Research Report IMS-66, Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica, Chengdu, 1995.

[21]马援、王振,关于多边形的 H_5 的最佳估计和计算,蛙鸣数学杂志,34(1988),11—19.

关于正 n 边形问题的解答

李文志

中国科学院计算中心(北京,2749 信箱 8805 分箱,100080)

在[1]中,我们讨论了如下正 n 边形问题的解法:

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为正 n 边形,其外接圆半径为单位,A,B,C 为其内部或边界上的点.求$\triangle ABC$ 的内切圆半径的最大值.

本文给出 $n=3m+1(m\geqslant 11)$ 及 $n=3m+2(m\geqslant 13)$ 时,三角形内切圆半径取得最大值的条件.

类似于[1],我们采用如下记号:

$s(ABC)$:三角形 ABC 的周长的一半,即$(AB+BC+CA)/2$.

$S(ABC)$:三角形 ABC 的面积.

$r(ABC)$:三角形 ABC 的内切圆半径.

$n(A,B)$:设 A,B 两点分别在正 n 边形的两条边上,沿正 n 边形的边,按逆时针方向从 A 点走到 B 点所经过的边数(A 点与 B 点所在的边不算在内).

在[1]中,我们给出了如下定理.

定理 1 对于正 n 边形来说,$r(ABC)$取得最大值的必要条件是:A,B,C 三点均在正 n 边形的边上,且 $n(A,B),n(B,C),n(C,A)$相差最大为 1,或者可以看作相差为 1.

当三角形某顶点(比如 A)与某个 p_i 点重合时,A 既可以看作是在边 $p_{i-1}p_i$ 上,又可以看作在边 p_ip_{i+1}上.定理 1 表明,如果

$r(ABC)$取得最值，且 A 与 p_i 重合，那么把 A 看作在 $p_{i-1}p_i$ 上或者在 p_ip_{i+1}上两种情形中，必有一种情形使得 $n(A,B)$，$n(B,C)$，$n(C,A)$两两之差不超过 1.

我们再建立如下定理：

定理 2 设$\triangle MNP$ 中，$MN=MP$，A，B，C 分别为 MN，NP，MP 上的动点，且均不与$\triangle MNP$ 的顶点重合，如果 $r(ABC)$取得极大值，那么

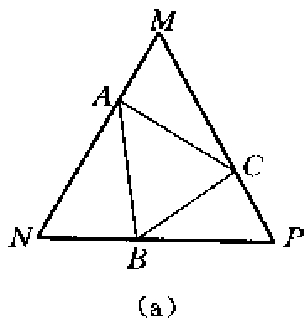
$$\angle NAB>\frac{\pi}{2},\angle BCP>\frac{\pi}{2}.$$

证明 我们先来证明：若 $r(ABC)$取得极大值，那么$\angle MAC<\frac{\pi}{2}$.

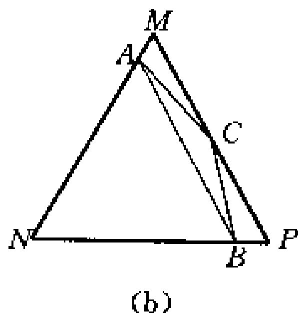
若$\angle MAC\geqslant\frac{\pi}{2}$，且$\angle NBC\geqslant\frac{\pi}{2}$（图 1($a$)），那么可以 C 为中心，将$\triangle ABC$ 逆时针方向旋转一个微小的角度，A，B 两点均旋转到了$\triangle MNP$ 内部. 旋转后的$\triangle ABC$ 与原来的全等，可见 $r(ABC)$非极大值.

若$\angle MAC\geqslant\frac{\pi}{2}$，且$\angle NBC<\frac{\pi}{2}$（图 1($b$)），那么将 B 沿平行于 AC 的直线向$\triangle MNP$ 内移动一个微小的距离后，$\triangle ABC$ 面积不变，但周长减小了，因而内切圆半径增大了.

因此我们有$\angle MAC<\frac{\pi}{2}$，类似可得$\angle MCA<\frac{\pi}{2}$.



(a)



(b)

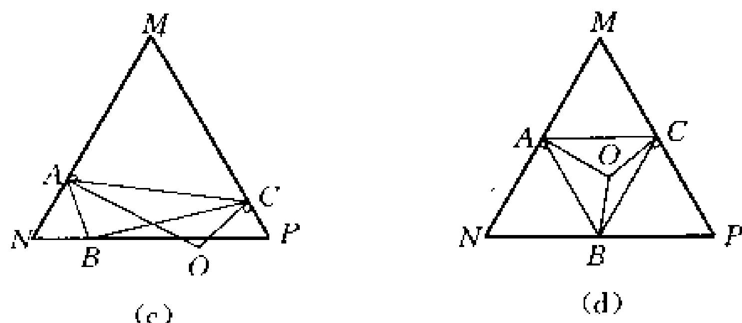


图 1

设过 A 点垂直于 MN 的直线与过 C 点垂直于 MP 的直线交于点 O. 若 OB 不与 NP 垂直(图 1(c)),或者 O 在$\triangle MNP$ 内(图 1(d)),那么可将$\triangle ABC$ 以 O 点为中心按逆时针或顺时针方向旋转一个微小的角度后,A,C 两点在$\triangle MNP$ 内,点 B 在$\triangle MNP$ 内或 NP 边上. 可见这种情形下,$r(ABC)$取不到极大值.

剩下来的情形是 $OB\perp NP$,且 O 在$\triangle MNP$ 外. 由 O 在$\triangle MNP$ 外,可知$\angle NAB>\angle NAO=\frac{\pi}{2}$. 同理,$\angle BCP>\frac{\pi}{2}$. 证毕.

由定理 1,我们可设 A,B,C 三点分别在正 n 边形的三边上,且 $n(A,B)$,$n(B,C)$,$n(C,A)$三者两两之差不大于 1,因而必有两者相等. 当 $n=3m$ 时,问题的答案是平凡的;当 $n=3m+1$ 时,二者分别为 $m-1$,$m-1$,m;当 $n=3m+2$ 时,二者分别为 $m-1$,m,m. 对于后两种情况,三边总有如下位置关系:两边关于第三边的垂直平分线对称,三边可延长相交成等腰三角形. 在图 2 中,如果 $r(ABC)$取得极大值,且 A,B,C 三点均不与正 n 边形的顶点重合,由定理 2,$n=3m+1$ 时,有$\angle BCP_{2m-1}\leqslant\frac{\pi}{2}$(图 2($a$));$n=3m+2$ 时,$\angle BCP_{2m+1}\geqslant\frac{\pi}{2}$(图 2($b$)),但是

当 $n=3m+1\geqslant 4$ 时,$\angle BCP_{2m+1}>\frac{2m\pi}{3m+1}>\frac{\pi}{2}$,

当 $n=3m+2\geqslant 8$ 时，$\angle BCP_{2m+3}>\dfrac{2m\pi}{3m+2}>\dfrac{\pi}{2}$，

矛盾！因此我们得到如下结论：若 $r(ABC)$ 取得极大值，A,B,C 三点至少有一点与某个 P_i 重合.

由图 2，我们不难验证：

(1)当 A,B,C 三点均与正 n 边形顶点重合时，$r(ABC)$ 取不到极大值；

(2)当 A,B,C 三点中有两点与正 n 边形顶点重合时，若 $r(ABC)$ 取到极大值，那么这两点间隔的边数为 $\left[\dfrac{n+1}{3}\right]$. 记这一极大值为 r_1.

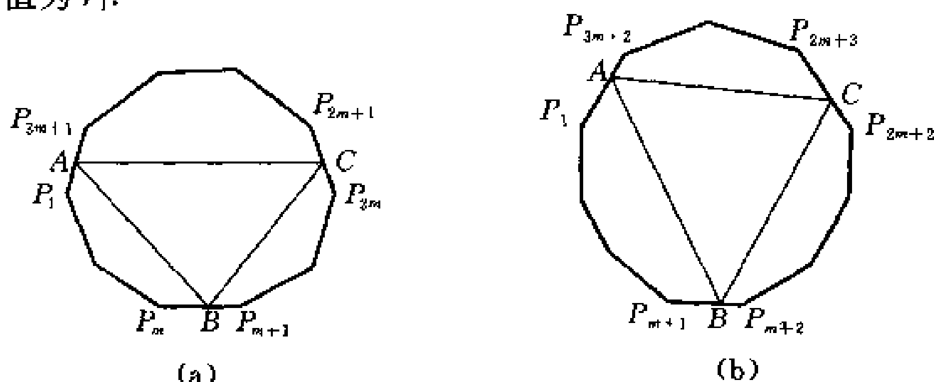


图 2

下面我们考虑三点中仅有一点与正 n 边形的顶点重合时的极大值.

建立平面直角坐标系，如图 3 所示. $\triangle ABC$ 三边长为

$$a=BC=\sqrt{(x_2+x_1)^2+k^2(x_2-x_1)^2},$$

$$b=CA=\sqrt{x_2^2+(kx_2-h)^2},$$

$$c=AB=\sqrt{x_1^2+(kx_1-h)^2};$$

面积为

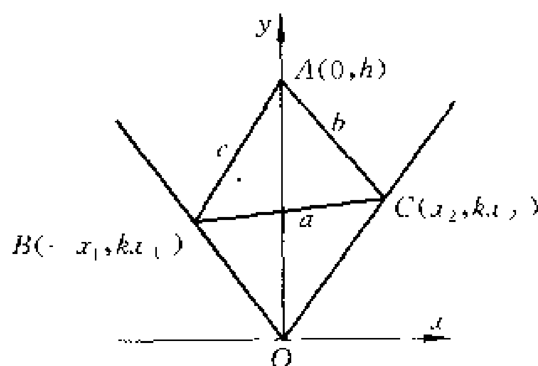


图 3

$$S=\frac{(hx_1+hx_2-2kx_1x_2)}{2},$$

内切圆半径为

$$r=\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{a+b+c}. \tag{1}$$

现在我们证明如下结论：当 $n=3m+1(m\geqslant 11)$ 或者 $n=3m+2(m\geqslant 13)$ 时，$r(P_1BC)$ 取得极值，且 B,C 均不与 P_i 重合的必要条件是 $x_1=x_2$.

证明 反证. 假定 $x\neq x_2$，$r(P_2BC)$ 取得极值，且 B,C 不与任一 P_i 重合，则

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=0, i=1,2,$$

即

$$\frac{h-2kx_2}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}\left[\frac{x_2+x_1+k^2(x_1-x_2)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}\right]=0. \tag{2}$$

$$\frac{h-2kx_1}{a+b+c}-\frac{hx_1+hx_2-2kx_1x_2}{(a+b+c)^2}\left[\frac{x_2+x_1+k^2(x_2-x_1)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{b}\right]=0. \tag{3}$$

(2)式减去(3)式，得

$$\frac{2k(x_1-x_2)}{a+b+c}-\frac{2S}{(a+b+c)^2}\left[\frac{2k^2(x_1-x_2)}{a}+\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}-\frac{(k^2+1)x_2-kh}{b}\right]=0. \tag{4}$$

利用恒等式

$$aA-bB=\frac{1}{2}(a+b)(A-B)+\frac{1}{2}(a-b)(A+B)$$

可得

$$\begin{aligned}&\frac{(k^2+1)x_1-kh}{c}-\frac{(k^2+1)x_2-kh}{b}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)(k^2+1)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\cdot\\&\quad[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]\\&=\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)(x_1-x_2)+\frac{b^2-c^2}{2bc(b+c)}\cdot\\&\quad[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]\\&=\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{2bc(b+c)}\cdot\\&\quad[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2\end{aligned}$$

将上式代入(4)式，得

$$\frac{2k(x_1-x_2)}{a+b+c}-\frac{2S(x_1-x_2)}{(a+b+c)^2}\left\{\frac{2k^2}{a}+\frac{b+c}{2bc}(k^2+1)+\frac{x_2-x_1}{2bc(b+c)}\frac{[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2}{2bc(b+c)}\right\}=0. \tag{5}$$

两边同乘以$\frac{(a+b+c)^2}{x_1-x_2}$，得

$$2k(a+b+c)-S\left\{\frac{4k^2}{a}+(k^2+1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\frac{[(k^2+1)(x_1+x_2)-2kh]^2}{bc(b+c)}\right\}=0. \tag{6}$$

记上式左端为 T，在上式中

$$k=\tan\frac{m\pi}{3m+1}\leqslant\sqrt{3},S\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$a\geqslant 2\sin\frac{(m-1)\pi}{3m+1},b,c\geqslant 2\sin\frac{m\pi}{3m+1}.$$

于是，我们得到当 $n=3m+1\geqslant 3m_0+1$ 时，

$$T>2k(a+b+c)-S\left\{\frac{4k^2}{a}+(k^2+1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}$$

$$>4\tan\frac{m_0\pi}{3m_0+1}\left(\sin\frac{(m_0-1)\pi}{3m_0+1}+2\sin\frac{m_0\pi}{3m_0+1}\right)$$

$$-\frac{3\sqrt{3}}{4}\left[12\left(2\sin\frac{(m_0-1)\pi}{3m_0+1}\right)^{-1}+8\left(2\sin\frac{m_0\pi}{3m_0+1}\right)^{-1}\right].$$

注意到 $m_0=11$ 时，上式右端大于零，于是 $m\geqslant 11$ 时(6)式不成立.

当 $n=3m+2$ 时，在(6)式中

$$k=\tan\frac{(m+1)\pi}{3m+1}>\sqrt{3},S\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$a,b,c\geqslant 2\sin\frac{m\pi}{3m+2}.$$

于是我们得到当 $n=3m+2\geqslant 3m_0+2$ 时，

$$T>2k(a+b+c)-S\left\{\frac{4k^2}{a}+(k^2+1)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right\}$$

$$>12\sqrt{3}\sin\frac{m_0\pi}{3m_0+2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(6\tan^2\frac{(m_0+1)\pi}{3m_0+2}+2\right)\cdot$$

$$\left(2\sin\frac{m_0\pi}{3m_0+2}\right)^{-1}.$$

我们取 $m_0=13$，可得 $m\geqslant 13$ 时 $T>0$，于是(6)式不成立. 证毕.

由上面这一结论，我们在(2)式中令 $x_2=x_1$，求得 x_1 与 x_2，代入(1)式可得 $r(ABC)$ 可能的最值 r_2（如不存在，记 $r_2=0$），与 r_1 比较取其中较大者即得到我们要求的内切圆半径的最大值.

综上所述，我们证明了如下结论：单位半径正 n 边形上三角形

内切圆半径如取得最大值，必有如下两种情形之一：

(1)三角形三顶点中有两顶点在正 n 边形的相隔 $\left[\frac{n+1}{3}\right]$ 条边的两顶点上，第三点为这两点的连线的垂直平分线与正 n 边形两交点中距两顶点较远的一个. 这个极大值可以用关于 n 的解析式表达；

(2)三角形一顶点在正 n 边形的一顶点上，另外两点在这样两条边上：它的距该顶点较近的端点与该顶点间隔的边数为 $\left[\frac{n}{3}\right]$. 并且这两点关于第三点与正 n 边形的中心连线对称. 这个极大值可以通过微积分的方法求得.

参考文献

[1]李文志，正 n 边形问题的解法，初等数学前沿(第一辑)，江苏教育出版社，1995，169—176.

一个三角形不等式的改进

刘正军　毛继林

江苏大丰县三龙中学(224161)
江苏泰兴市泰兴中学(225400)

《高中数学竞赛教程》* 第 130 页习题 16 第 5 题是：

在$\triangle ABC$ 中，求证：

$$\sin A\sin\frac{A}{2}+\sin B\sin\frac{B}{2}+\sin C\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

原证法如下：令 $y=\sin A\sin\frac{A}{2}=2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，则

$$y^2=2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\cos^2\frac{A}{2}\right)$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}+2\cos^2\frac{A}{2}}{3}\right)^3$$

所以

$$y=\sin A\sin\frac{A}{2}\leqslant\frac{4}{3\sqrt{3}}. \tag{2}$$

同样地

---

* 高中数学竞赛教程，江苏教育出版社，1989 年 6 月第一版.

$$\sin B\sin\frac{B}{2}\leqslant\frac{4}{3\sqrt{3}},\quad \sin C\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

将以上三式相加，得

$$\sin A\sin\frac{A}{2}+\sin B\sin\frac{B}{2}+\sin C\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}.\tag{3}$$

显然，三个“$\leqslant$”中“$=$”成立的条件是

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}=\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}=2,\tag{4}$$

但这是不可能的，即原不等式中“$=$”是达不到的，故这个不等式也是比较粗糙的.

既然$\frac{4}{\sqrt{3}}$不是上确界，一个自然的猜测是：当$\triangle ABC$是正三角形时，(1)左边是否达到最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$？然而，这并不正确. 例如，令$(A,B,C)\to(0°,90°,90°)$时，(1)左边$\to\sqrt{2}>\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 下面我们来证明：$\sqrt{2}$就是(1)左边表达式的上确界，即

定理 1 在$\triangle ABC$中，有

$$\sin A\sin\frac{A}{2}+\sin B\sin\frac{B}{2}+\sin C\sin\frac{C}{2}<\sqrt{2}.\tag{5}$$

证明 由 Cauchy 不等式，得

$$\sin A\sin\frac{A}{2}+\sin B\sin\frac{B}{2}+\sin C\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant(\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C)^{1/2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)^{1/2}.\tag{6}$$

设s、R、r是$\triangle ABC$的半周长、外接圆和内切圆的半径，则有三角形恒等式

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=\frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2},\tag{7}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{2R-r}{2R}. \tag{8}$$

所以要证(5)只需证

$$\frac{2R-r}{2R}\cdot\frac{s^2-4Rr-r^2}{2R^2}<2. \tag{9}$$

再由 Gerretsen 不等式

$$s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2,$$

要证(9),只需证

$$\frac{2R-r}{2R}\cdot\frac{4R^2+2r^2}{2R^2}<2,$$

即

$$4R^3-(2R-r)(2R^2+r^2)=2R^2r-2Rr^2+r^3>0.$$

证毕.

由于

$$\sqrt{\sin A}>\sin A,\ \sqrt{\sin B}>\sin B,\ \sqrt{\sin C}>\sin C,$$

我们来进一步加强定理 1.

定理 2 在$\triangle ABC$中,有

$$\sqrt{\sin A}\sin\frac{A}{2}+\sqrt{\sin B}\sin\frac{B}{2}+\sqrt{\sin C}\sin\frac{C}{2}<\sqrt{2}. \tag{10}$$

证明 由 Cauchy 不等式及恒等式(8)及

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{s}{R}, \tag{11}$$

得

$$\sqrt{\sin A}\sin\frac{A}{2}+\sqrt{\sin B}\sin\frac{B}{2}+\sqrt{\sin C}\sin\frac{C}{2}$$

$$\leqslant(\sin A+\sin B+\sin C)^{1/2}\left(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{\frac{s}{R}}\cdot\sqrt{\frac{2R-r}{2R}}. \tag{12}$$

要证(10)只需证

$$s(2R-r)\leqslant 4R^2. \tag{13}$$

再由 Kooi 不等式

$$2(2R-r)s^2\leqslant R(4R+r)^2,$$

要证(13),只需证

$$\frac{R(4R+r)^2}{2(2R-r)}(2R-r)^2\leqslant 16R^4,$$

即

$$32R^3-(4R+r)^2(2R-r)=6Rr^2+r^3>0.$$

证毕.

最后,我们提出如下猜想.

猜想 在$\triangle ABC$中,有

$$\sin^k A\sin\frac{A}{2}+\sin^k B\sin\frac{B}{2}+\sin^k C\sin\frac{C}{2}\leqslant\sqrt{2},$$

其中

$$k\geqslant\frac{\ln 9-\ln 8}{\ln 4-\ln 3}=0.40942083\cdots.$$

两个三角形不等式指数推广的证明

四

石世昌

浙江新昌中学(312500)

1939 年,J. M. Child[1]建立了如下的不等式:

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}. \tag{1}$$

其中 A、B、C 为三角形的三个内角.下同.

18 年后,R. Kooistera[2]又得到了不等式:

$$\frac{3}{4}\leqslant\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}. \tag{2}$$

如今,(1)与(2)式均为众人所熟知,并且给出了许多巧妙的证明. 1989 年,陈计与王振从指数方向给出了它们的一种加强(见[3]),本文我们试图给出一种较简的证法.

定理 (i)当且仅当

$$k\leqslant k_1=\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 2}\approx 1.169925001\cdots \tag{3}$$

时,不等式

$$M_k\left\{\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}\right\}$$

$$=\left(\frac{\sin^k\frac{A}{2}+\sin^k\frac{B}{2}+\sin^k\frac{C}{2}}{3}\right)^{1/k}\leqslant\frac{1}{2} \tag{4}$$

对每个三角形成立;

(ii)当且仅当

$$k \geqslant k_2 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.584962501\cdots \tag{5}$$

时,不等式

$$M_k\left(\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{\sin^k\frac{A}{2}+\sin^k\frac{B}{2}+\sin^k\frac{C}{2}}{3}\right)^{1/k} \geqslant \frac{1}{2} \tag{6}$$

对每个三角形成立.

用微分知识不难建立:

引理 1 设 $a \geqslant b > 0$,则

(a)当 $1<\alpha<2$ 时,有

$$[a^{\alpha-1}+(\alpha-1)a^{\alpha-2}b](a-b) \leqslant a^\alpha - b^\alpha \leqslant [a^{\alpha-1}+(\alpha-1)b^{\alpha-1}](a-b);$$

(b)当 $0<\alpha<1$ 时,有

$$\alpha a^{\alpha-1}(a-b) \leqslant a^\alpha - b^\alpha \leqslant \alpha b^{\alpha-1}(a-b);$$

引理 2 若 $A \leqslant B \leqslant C$,则

(c) $M_{k_1}\left(\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}\right)$

$$\leqslant M_{k_2}\left(\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B+C}{4},\sin\frac{B+C}{4}\right);$$

(d) $M_{k_2}\left(\sin\frac{A}{2},\sin\frac{B}{2},\sin\frac{C}{2}\right)$

$$\geqslant M_{k_2}\left(\sin\frac{A+B}{4},\sin\frac{A+B}{4},\sin\frac{C}{2}\right).$$

证明 显然,(c)式等价于

$$2\sin^{k_1}\frac{B+C}{4}-\sin^{k_1}\frac{B}{2}-\sin^{k_1}\frac{C}{2} \geqslant 0.$$

因为

$$\sin\frac{C}{2} \geqslant \sin\frac{B+C}{4} \geqslant \sin\frac{B}{2}, 1 \leqslant k_1 < 2,$$

所以由引理 1,得

$$
\begin{aligned}
&2\sin^{k_1}\frac{B+C}{4}-\sin^{k_1}\frac{B}{2}-\sin^{k_1}\frac{C}{2}\\
&=\left(\sin^{k_1}\frac{B+C}{4}-\sin^{k_1}\frac{B}{2}\right)-\left(\sin^{k_1}\frac{C}{2}-\sin^{k_1}\frac{B+C}{4}\right)\\
&\geqslant\left[\sin^{k_1-1}\frac{B+C}{4}+(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\sin\frac{B}{2}\right]\left(\sin\frac{B+C}{4}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{B}{2}\right)-\left[\sin^{k_1-1}\frac{C}{2}+(k_1-1)\sin^{k_1-1}\frac{B+C}{4}\right]\left(\sin\frac{C}{2}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{B+C}{4}\right)\\
&=\left[\sin^{k_1-1}\frac{B+C}{4}+(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\sin\frac{B}{2}\right]\left(2\sin\frac{B+C}{4}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-\left[\left(\sin^{k_1-1}\frac{C}{2}-\sin^{k_1-1}\frac{B+C}{4}\right)\right.\\
&\quad\left.+(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\left(\sin\frac{B+C}{4}-\sin\frac{B}{2}\right)\right]\\
&\quad\cdot\left(\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B+C}{4}\right)\\
&\geqslant\left[\sin^{k_1-1}\frac{B+C}{4}+(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\sin\frac{B}{2}\right]\left(2\sin\frac{B+C}{4}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-\left[(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\left(\sin\frac{C}{2}\right.\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{B+C}{4}\right)+(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\cdot\left(\sin\frac{B+C}{4}\right.\\
&\quad\left.\left.-\sin\frac{B}{2}\right)\right]\left(\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B+C}{4}\right)\\
&=4\sin^2\frac{B-C}{8}\sin\frac{B+C}{4}\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\cdot\left[\sin\frac{B+C}{4}\right.\\
&\quad\left.+(k_1-1)\sin\frac{B}{2}\right]-4(k_1-1)\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\cos\frac{B+C}{4}\\
&\quad\cdot\sin\frac{C-B}{4}\cos\frac{B+3C}{8}\cdot\sin\frac{C-B}{8}\\
&=4\sin^{k_1-2}\frac{B+C}{4}\sin^2\frac{B-C}{8}\cdot\left\{\sin\frac{B+C}{4}\left[\sin\frac{B+C}{4}\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+(k_1-1)\sin\frac{B}{2}\Big]-2(k_1-1)\cos\frac{B-C}{4}\cos\frac{C-B}{8}$$

$$\cdot\cos\frac{B+3C}{8}\Big\}. \tag{7}$$

所以，只要证明(7)式右端大括号内的式子(记作 G)大于等于零. 分两种情况：

当 $0<B\leqslant\frac{\pi}{6}$ 时，$C\geqslant\frac{2\pi}{3}$，$B+C\geqslant\frac{2\pi}{3}$，故

$$G\geqslant\sin^2\frac{\pi}{6}-2(k_1-1)\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}(k_1-1)>0;$$

当 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$ 时，因为 $\sin\frac{\pi}{12}>\frac{1}{4}$，故

$$G\geqslant\sin\frac{\pi}{6}\Big[\sin\frac{\pi}{6}+(k_1-1)\sin\frac{\pi}{12}\Big]-2(k_1-1)\cos^2\frac{\pi}{6}$$

$$>\frac{1}{4}+\frac{1}{8}(k_1-1)-2(k_1-1)\cdot\frac{3}{4}$$

$$=\frac{1}{8}(13-11k_1)>0,$$

因此，(c)式成立.

(d)式等价于

$$\sin^{k_2}\frac{A}{2}+\sin^{k_2}\frac{B}{2}-2\sin^{k_2}\frac{A+B}{4}\geqslant 0.$$

由于

$$\sin\frac{B}{2}\geqslant\sin\frac{A+B}{4}\geqslant\sin\frac{A}{2},1<k_2<2,$$

所以由引理 1 并注意到

$$0<A+B\leqslant\frac{2\pi}{3},0<B<\frac{\pi}{2},0<3A+B\leqslant\frac{4\pi}{3},$$

得

$$\sin^{k_2}\frac{A}{2}+\sin^{k_2}\frac{B}{2}-2\sin^{k_2}\frac{A+B}{4}$$

$$=\Big(\sin^{k_2}\frac{B}{2}-\sin^{k_2}\frac{A+B}{4}\Big)-\Big(\sin^{k_2}\frac{A+B}{4}-\sin^{k_2}\frac{A}{2}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant\left[\sin^{k_2-1}\frac{B}{2}+(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{4}\right]\left(\sin\frac{B}{2}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{A+B}{4}\right)-\left[\sin^{k_2-1}\frac{A+B}{4}+(k_2-1)\sin^{k_2-1}\frac{A}{2}\right]\\
&\quad\left(\sin\frac{A+B}{4}-\sin\frac{A}{2}\right)\\
&=\left[\left(\sin^{k_2-1}\frac{B}{2}-\sin^{k_2-1}\frac{A+B}{4}\right)+(k_2-1)\left(\sin^{k_2-1}\frac{B}{2}-\sin^{k_2-1}\frac{A}{2}\right)\right.\\
&\quad\left.+(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\left(\sin\frac{A+B}{4}-\sin\frac{B}{2}\right)\right]\cdot\left(\sin\frac{A+B}{4}\right.\\
&\quad\left.-\sin\frac{A}{2}\right)-\left[\sin^{k_2-1}\frac{B}{2}+(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin\frac{A+B}{4}\right]\\
&\quad\left(2\sin\frac{A+B}{4}-\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\\
&\geqslant\left[(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{A+B}{4}\right)+(k_2-1)^2\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)-(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{A+B}{4}\right)\right]\\
&\quad\cdot\left(\sin\frac{A+B}{4}-\sin\frac{A}{2}\right)-\left[\sin^{k_2-1}\frac{B}{2}+(k_2-1)\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\right.\\
&\quad\left.\cdot\sin\frac{A+B}{4}\right]\left(2\sin\frac{A+B}{4}-\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)\\
&=4\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin^2\frac{A-B}{8}\left\{2(k_2-1)^2\cos\frac{A+B}{4}\cos\frac{B-A}{8}\right.\\
&\quad\left.\cdot\cos\frac{3A+B}{8}-\sin\frac{A+B}{4}\left[\sin\frac{B}{2}+(k_2-1)\sin\frac{A+B}{4}\right]\right\}\\
&\geqslant4\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin^2\frac{A-B}{8}\left\{2(k_2-1)^2\cos^2\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{16}-\sin\frac{\pi}{6}\right.\\
&\quad\left.\cdot\left[\sin\frac{\pi}{4}+(k_2-1)\sin\frac{\pi}{6}\right]\right\}\\
&=4\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin^2\frac{A-B}{8}\left\{2(k_2-1)^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\right.\\
&\quad\left.-\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}(k_2-1)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$\geqslant 0.014\sin^{k_2-2}\frac{B}{2}\sin^2\frac{A-B}{8}\geqslant 0$$

因此，(d)式成立.

定理的证明如下.

在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上定义函数：

$$f(x)=\sin^k 2x+2\sin^k\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-3\left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{8}$$

$$f'(x)=2k\sin^{k-1}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$
$$\cdot\left[2\sin^{k-1}2x\sin^{2-k}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1\right] \tag{9}$$

令

$$g(x)=2\sin^{k-1}2x\sin^{2-k}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-1, \tag{10}$$

$$g'(x)=2\sin^{k-1}2x\sin^{2-k}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[2(k-1)\operatorname{ctg}2x\right.$$
$$\left.-(2-k)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]; \tag{11}$$

令

$$h(x)=2(k-1)\operatorname{ctg}2x-(2-k)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right), \tag{12}$$

$$h'(x)=-\frac{4(k-1)}{\sin^2 2x}-\frac{2-k}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}. \tag{13}$$

显然，当 $1<k<2$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$在$(0,\frac{\pi}{4})$上单调减少.

(1)设$\frac{A}{4}=x\in\left(0,\frac{\pi}{12}\right]$，由引理 2 中(c)及幂平均的单调性知，要证(5)式，我们只要证明当 $k=k_1$ 时，$f(x)\leqslant 0\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{12}\right)$.

这时，

$$\lim_{x\to 0^+} h(x)=+\infty, h\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}(3k_1-4)<0,$$

所以 $h(x)$ 即 $g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 内有唯一零点 x_0，即当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x_0<x<\frac{\pi}{12}$ 时，$g'(x)<0$. 又因为 $g(0)=-1<0$，$g\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$，所以 $g(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 内有唯一零点 x_1，满足 $0<x_1<x_0$. 当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x_1<x<\frac{\pi}{12}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{12})$ 内有唯一的极小值驻点 x_1，$f(x)$ 的极大(最大)点在 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{12}$ 处达到，但 $f(0)=f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$，故 $f(x)\leqslant 0$，不等式(4)证毕.

于(5)中令 $A=0, B=C=\frac{\pi}{2}$，(5)式成为

$$\left(\frac{2\sin^k\frac{\pi}{4}}{3}\right)^{1/k}\leqslant\frac{1}{2},$$

即

$$k\leqslant\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 2}=k_1.$$

故 k_1 是不可改进的.

(2) 设 $\frac{C}{4}=x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$，由引理 2 中(d)式及幂平均的单调性，我们只要证明：当 $k=k_2$ 时，

$$f(x)\geqslant 0\left(\frac{\pi}{12}\leqslant x<\frac{\pi}{4}\right).$$

因为

$$h\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}(3k_2-4)>0, \lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0} h(x)=-\infty,$$

所以 $h(x)$ 在 $(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4})$ 内有唯一零点 x_2，即当 $\frac{\pi}{12}<x<x_2$ 时，$g'(x)>0$；当 $x_2<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g'(x)<0$.

又因为

$$g\left(\frac{\pi}{12}\right)=0, g\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1<0,$$

所以，$g(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$ 内有唯一零点 x_3，满足 $x_2<x_3<\frac{\pi}{4}$，即当 $\frac{\pi}{12}<x<x_3$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_3<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)<0$，因此，$x=x_3$ 是 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)$ 内唯一极值（最大）驻点，$f(x)$ 的极小（最小）值在 $x=\frac{\pi}{12}$ 或 $x=\frac{\pi}{4}$ 处取得，但由于 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，故 $f(x)\geqslant 0$.

于(6)式中令 $A=B=0, C=\pi$，则(6)式成为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1/k}\geqslant\frac{1}{2},$$

即

$$k\geqslant\frac{\ln 3}{\ln 2}=k_2.$$

因此，k_2 是最佳的. 证毕.

参考文献

[1]J. M. Child, Math. Gaz., 23(1939), 138—143.

[2]R. Kooistra, Nieuw Tijschr. Wisk., 45(1957/58), 108—115.

[3]杨任尔，Child 不等式与 Kooistra 不等式的加强，初等数学研究论文选，上海教育出版社，359—364.

一个三角不等式的证明

许康华

浙江富阳中学(311400)

1994年11月，刘健在文[1]中提出了如下的猜想：

命题　在任意$\triangle ABC$中，有

$$\frac{\cos^2 A}{\sin^2 B+\sin^2 C}+\frac{\cos^2 B}{\sin^2 C+\sin^2 A}+\frac{\cos^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 B}\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

笔者经探究，发现此猜想是成立的，本文试图给出它的一个证明.

证明　由$\cos^2 A=1-\sin^2 A$等及正弦定理知，不等式(1)等价于

$$\sum\frac{4R^2-a^2}{b^2+c^2}\geqslant\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

即　$$\prod(b^2+c^2)-2\sum(4R^2-a^2)(a^2+b^2)(a^2+c^2)\leqslant 0,$$

其中$\sum$、$\prod$表示对字母a,b,c轮换求和、求积，下同此.

也即

$$\prod\left(\sum a^2-a^2\right)-8R^2\sum\left(a^2\sum a^2+b^2c^2\right)$$

$$+2\sum a^2\left(a^2\sum a^2+b^2c^2\right)\leqslant 0,$$

因此有

$$\left(\sum a^2\sum b^2c^2+2\sum a^2\sum a^4\right)-8R^2\left[\left(\sum a^2\right)^2+\sum b^2c^2\right]$$
$$+5a^2b^2c^2\leqslant 0. \tag{3}$$

再由三解形恒等式(参见[2]第四章):

$$abc=4sRr, \tag{4}$$

$$\sum bc=s^2+4Rr+r^2, \tag{5}$$

$$\sum a^2=2(s^2-4Rr-r^2), \tag{6}$$

$$\sum a^4=2[s^4-(8Rr+6r^2)s^2+r^2(4R+r)^2], \tag{7}$$

$$\sum b^2c^2=\left(\sum bc\right)^2-2abc(a+b+c)$$
$$=s^4+2(r^2-4Rr)s^2+(4Rr+r^2)^2, \tag{8}$$

易得$\sum a^2\sum b^2c^2+2\sum a^2\sum a^4$

$$=10s^6-(120Rr+54r^2)s^4+(4Rr+r^2)(120Rr+54r^2)s^2$$
$$-10(4Rr+r^2)^3, \tag{9}$$

及

$$\left(\sum a^2\right)^2+\sum b^2c^2=5s^4-(40Rr+6r^2)s^2+5(4Rr+r^2)^2. \tag{10}$$

将(4)、(9)、(10)三式代入(3)中,经计算、整理得(3)的等价式

$$f(s^2)=10s^6-(40R^2+120Rr+54r^2)s^4$$
$$+(320R^3r+608R^2r^2+336Rr^3+54r^4)s^2$$
$$-(40R^2+40Rr+10r^2)(4Rr+r^2)^2\leqslant 0. \tag{11}$$

注意到三角形内的一个熟知不等式(参见[3,13.8])

$$s^4-2(2R^2+10Rr-r^2)s^2+r(4R+r)^3\leqslant 0, \tag{12}$$

我们将$f(s^2)$恒等变形为

$$f(s^2)=(10s^2+80Rr-74r^2)[s^4-2s^2(2R^2+10Rr-r^2)$$
$$+r(4R+r)^3]+s^2(1432R^2r^2-1424Rr^3+192r^4)$$
$$-(360R^2-176Rr-64r^2)(4Rr+r^2)^2,$$

这样,欲证(11),仅需证

$$s^2(179R^2-178Rr+24r^2)-(45R^2-22Rr-8r^2)(4R+r)^2\leqslant 0, \tag{13}$$

在上式中利用 O. Kooi 不等式(参见[3,5.7]):

$$2s^2(2R-r)\leqslant R(4R+r)^2 \tag{14}$$

知,也只要证

$$R(179R^2-178Rr+24r^2)-2(2R-r)(45R^2-22Rr-8r^2)\leqslant 0.$$

化简,整理,得

$$R^3-12Rr^2+16r^3\geqslant 0. \tag{15}$$

即 $$(R-2r)(R^2+2Rr-8r^2)\geqslant 0. \tag{16}$$

由 Euler 不等式 $R\geqslant 2r$ 知,上式成立.从而命题得证.

参考文献

[1]刘健,关于三角形的几个三角不等式,教学月刊(中学理科版),11(1994).

[2]D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[3]O. Bottema 等著,单墫译,几何不等式,北京大学出版社,1991.

关于一个几何不等式的再探讨

陈胜利

福建南安市五星中学(362341)

黄西灵在文[1]中提出△ABC 中的如下不等式：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{R}+\frac{1}{K}\left(\frac{2}{R}-\frac{1}{r}\right)\right]\qquad(1)$$

并通过举反例指出，当 $0<K\leqslant 2(2+\sqrt{3})=7.46410\cdots$ 时，(1)式不成立，从而猜想：对于 $K\in(7.46410\cdots,9)$，(1)式也不成立.

事实上，陈计在文[1]中就提出下述定理：

$$\frac{11\sqrt{3}}{5R+12r}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{5}{4R}+\frac{7}{8r}\right).\qquad(2)$$

而上式右边即为(1)中 $K=8$ 时的结果. 可见(1)当 $K\geqslant 8$ 时成立，因而黄的上述猜想并不成立. 进一步，我们可证明下述命题.

命题 使(1)成立的正数 K 的最小值

$$K_{\min}=7.69464\cdots,$$

它是方程

$$(x+2)^2(x^2-8x+4)^2+(x^2-8x-4)^3=0\qquad(3)$$

在区间 $(4+2\sqrt{3},4+2\sqrt{5})$ 上的根.

证明 由三角形恒等式[1]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=(s^2+r^2+4Rr)/(4Rrs)\quad\left(s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$$

知(1)等价于

$$\sqrt{3}Ks^2-4s[(K-1)R+(K+2)r]+\sqrt{3}K(r^2+4Rr)\leqslant 0. \tag{1'}$$

因(1)对 $0<K\leqslant 2(2+\sqrt{3})$ 不成立，故下面设 $K>2(2+\sqrt{3})$，则上式可化为形如

$$f_1(R,r)\leqslant s\leqslant f_2(R,r)$$

的齐次不等式. 于是据文[2]中的推论 1，(1′)式当且仅当它的三基本量分别取

$$R=1, r=2t(1-t), s=2(1+t)\sqrt{1-t^2} \tag{4}$$

时，所得不等式对一切 $t\in(0,1)$ 都成立. 因此，将(4)代入(1′)，整理化简，得

$$\sqrt{3}K(1-t)(4t+1)\leqslant 2\sqrt{1-t^2}[-2(K+2)t^2+2(K+2)t+(K-1)].$$

由 $K>2(2+\sqrt{3})$，$t\in(0,1)$ 知上式两边均为正数，从而可两边平方，化为

$$\begin{aligned}H_K(t)\equiv&16(K+2)^2t^5-16(K+2)^2t^4+16(K^2-5K-2)t^3\\&-8(K^2-8K-8)t^2-(K^2-8K+28)t+(K^2-8K+4)\\\equiv&(2t-1)^2\cdot F_K(t)\geqslant 0.\end{aligned} \tag{1''}$$

式中

$$F_K(t)\equiv 4(K+2)^2t^3+3(K^2-8K-4)t+(K^2-8K+4). \tag{5}$$

下面只要求使 $F_K(t)\geqslant 0$ 对一切 $t\in(0,1)$ 成立的最小正数 K 即可. 为此，我们设 $F_K(t)$ 在 $t\in(0,1)$ 的最小值为 m_K，则

1°当 $K\geqslant 2(2+\sqrt{5})$ 时，有 $K^2-8K-4\geqslant 0$，从而由(5)知

$$m_K>K^2-8K+4>0\Rightarrow F_K(t)>0\ (0<t<1);$$

2°当 $2(2+\sqrt{3})<K<2(2+\sqrt{5})$ 时，有

$$K^2-8K-4<0, K^2-8K+4\geqslant 0. \tag{6}$$

从而不难得知

$$m_K=F_K\left(\frac{\sqrt{-(K^2-8K-4)}}{2(K+2)}\right)$$
$$=\frac{(K+2)(K^2-8K+4)-[-(K^2-8K-4)]^{3/2}}{K+2}.$$

则

$$F_K(t)\geqslant 0 \quad (0<t<1)\Leftrightarrow m_K\geqslant 0.$$

$$\Leftrightarrow f(K)\equiv(K+2)^2(K^2-8K+4)^2+(K^2-8K-4)^3\geqslant 0. \tag{7}$$

注意到

$$f'(K)=2(K+2)(K^2-8K+4)^2+2(K+2)^2(K^2-8K+4)$$
$$\cdot(2K-8)+3(K^2-8K-4)^2(2K-8)>0(\text{由}(6))$$

故 $f(K)$在$(4+2\sqrt{3},4+2\sqrt{5})$上递增，而经计算知

$$f(7.69463)<0, f(7.69465)>0.$$

故

$$f(7.69464\cdots)=0. \tag{8}$$

则 $K\in(4+2\sqrt{3},4+2\sqrt{5})$时，

$$f(K)\geqslant 0\Leftrightarrow K\geqslant 7.69464\cdots.$$

综上知，使(1″)即(1)成立的最小正数 $K=7.69464\cdots$，而由(7)，(8)知，$7.69464\cdots$是方程(3)在$(4+2\sqrt{3},4+2\sqrt{5})$上的根，于是命题得证.

最后，我们顺便给出(2)左边不等式的另一证明：先将它化为三基本量不等式

$$(5R+12r)s^2-44\sqrt{3}Rrs+(5R+12r)(4Rr+r^2)\geqslant 0 \tag{9}$$

不妨设

$$\Delta(R,r)=(44\sqrt{3}Rr)^2-4(5R+12r)^2(4Rr+r^2)\geqslant 0,$$

否则(9)必成立，则(9)又可化为

$$s \geqslant \frac{44\sqrt{3}Rr + \sqrt{\Delta(R,r)}}{2(5R+12r)}. \qquad (9')$$

(由 Gerretsen 不等式 $s^2 \geqslant 16Rr - 5r^2$，知

$$s \leqslant \frac{44\sqrt{3}Rr - \sqrt{\Delta(R,r)}}{2(5R+12r)} \text{不成立})$$

从而据文[2]中推论 1，(9')即(9)成立当且仅当它作代换(4)后所得不等式

$$(5+24t-24t^2)(4-4t)(4t^2+5t+1)$$
$$\geqslant 44\sqrt{3}(4t)(1-t^2)\sqrt{1-t^2},$$

即

$$(5+24t-24t^2)(4t+1) \geqslant 44\sqrt{3}t\sqrt{1-t^2}$$

对一切 $t \in [1/2, 1)$ 都成立. 令

$$t = \frac{1}{2}(1+x) \qquad (0 \leqslant x < 1),$$

则上式化为

$$(11-6x^2)(2x+3) \geqslant 11\sqrt{3}(1+x)\sqrt{(1-x)(3+x)}$$
$$\Leftrightarrow x^2(144x^4+432x^3+159x^2-132x+22) \geqslant 0. \qquad (9'')$$

记

$$\psi(x) = 144x^4+432x^3+159x^2-132x+22,$$

则当 $0 \leqslant x \leqslant 22/132 = 1/6$ 时，显见 $\psi(x) > 0$；

当 $1/6 < x \leqslant 1/5$ 时，

$$\psi(x) > 144/6^4 + 432/6^3 + 159/6^2 - 132/5 + 22 > 0;$$

当 $1/5 < x \leqslant 2/9$ 时，

$$\psi(x) > 144/5^4 + 432/5^3 + 159/5^2 - 132 \times 2/9 + 22 > 0;$$

而当 $x > 2/9$ 时，因

$$\psi'(x) = 4 \times 144x^3 + 3 \times 432x^2 + 2 \times 159x - 132$$

为增函数，故 $\psi'(x) > \psi'(2/9) > 0$，从而 $\psi(x)$ 在 $(2/9, 1)$ 上也为增函数，于是 $\psi(x) > \psi(2/9) > 0$.

综上有

$$\phi(x)>0 \quad (0\leqslant x<1).$$

可见(9″)成立，从而(2)左边不等式得证(比较文[1]的证明，这里的方法要简便些，也较易于掌握，而原证明则引用了几个鲜为人知的不等式，计算量也甚大).

参考文献

[1]陈计等，关于一个几何不等式的探讨，福建中学数学，1993年第6期.

[2]陈胜利，证明一类不等式的新方法——等量替换法，福建中学数学，1993年第3期.

三角形三内角函数的常见不等式的加强

黄汉生

湖南绥宁县一中(422600)

$\triangle ABC$ 的三个内角,外接圆半径,内切圆半径,半周长分别记作 α、β、γ,R,r,p. 规定 $x=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,$y=\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$,$z=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$,则

$$x+y+z=x\cdot y\cdot z,$$

$$r=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{4R}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}}$$

$$=\frac{4R}{xy+yz+zx-1}.$$

1988 年,第 29 届 IMO 西班牙提供的备选题中有一道试题[1]:

证明: $$\sum\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{5}{8}+\frac{r}{4R}. \tag{1}$$

不等式(1)比不等式 $\sum\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{3}{4}$[2] 强.

本文试图用常数与 $\frac{r}{R}$ 的线性组合加强关于三角形三内角函数的常见不等式——建立一些新的三角形三内角函数的不等式.

命题 1 $$\sum\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{r}{2R}. \tag{2}$$

证明 $\because \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{\frac{yz}{yz(1+x^2)}}$

$$=\sqrt{\frac{yz}{(z+x)(x+y)}},$$

同理 $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{zx}{(x+y)(y+z)}},\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}},$

则 $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{z}{x+y}\sqrt{\frac{xy}{(y+z)(z+x)}}$

$$\leqslant\frac{z}{2(x+y)}\left(\frac{y}{y+z}+\frac{x}{z+x}\right)$$

同理 $\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{x}{2(y+z)}\left(\frac{z}{z+x}+\frac{y}{x+y}\right),$

$\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{y}{2(z+x)}\left(\frac{x}{x+y}+\frac{z}{y+z}\right),$

$\therefore\sum\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{(z+x)y}{(x+y)(y+z)}+\frac{(x+y)z}{(y+z)(z+x)}+\frac{(y+z)x}{(z+x)(x+y)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(z+x)^2y+(x+y)^2z+(y+z)^2x}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{xy+yz+zx+3}{xy+yz+zx-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{xy+yz+zx-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\frac{4R}{r}}\right)=\frac{1}{2}+\frac{r}{2R}.$$

当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时式中等号成立(后文同,不另作说明).

不等式(2)比不等式(1)强.

命题 2 $\sum\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\geqslant22-\frac{20r}{R}.$ (3)

证明 $\because\csc\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+x^2},\csc\frac{\beta}{2}=\sqrt{1+y^2},\csc\frac{\gamma}{2}$

$=\sqrt{1+z^2}$,

$$\therefore \csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}=\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=\sqrt{(xy+1)^2+(x-y)^2}$$
$\geqslant xy+1$

同理 $\csc\frac{\beta}{2}\csc\frac{\gamma}{2}\geqslant yz+1$, $\csc\frac{\gamma}{2}\csc\frac{\alpha}{2}\geqslant zx+1$.

$$\therefore \sum\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\geqslant xy+yz+zx+3=\frac{4R+r}{r}+3=4+\frac{4R}{r}$$
$$=22+\frac{4R-18r}{r}\geqslant 22+\frac{8r-18r}{\frac{R}{2}}=22-\frac{20r}{R}.$$

不等式(3)比不等式“$\sum\csc\frac{\alpha}{2}\csc\frac{\beta}{2}\geqslant 12$”强.

命题 3 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\leqslant 2+\frac{r}{2R}$. (4)

证明 $\because \sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}$
$$=\frac{3+2(x^2+y^2+z^2)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$
$$=\frac{3+2x^2y^2z^2-4(xy+yz+zx)+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{(xy+yz+zx-1)^2}$$
$$=\frac{(xy+yz+zx)^2-4(xy+yz+zx)+3}{xy+yz+zx-1}=\frac{xy+yz+zx-3}{xy+yz+zx-1}$$
$$=\frac{\frac{4R}{r}-2}{\frac{4R}{r}}=\frac{2R-r}{2R}=1-\frac{r}{2R},$$
$$\therefore \sum\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\leqslant\sum\cos^2\frac{\alpha}{2}=3-\sum\sin^2\frac{\alpha}{2}=2+\frac{r}{2R}.$$

不等式(4)比不等式“$\sum\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{9}{4}$”强.

猜想 1 $\sum\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{1+2\sqrt{2}}{2}+\frac{7-4\sqrt{2}}{R}r$.

命题 4 $\sum\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\geqslant 17-\frac{16r}{R}$. (5)

证明 $\sum \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=xy+yz+zx=\frac{4R+r}{r}=1+\frac{4R}{r}$

$=17+\frac{4R}{r}-16=17+\frac{4R-16r}{r}\geqslant 17+\frac{8r-16r}{\frac{R}{2}}=17-\frac{16r}{R}.$

不等式(5)比不等式"$\sum \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\geqslant 9$"强.

类似的加强不等式还有.

猜想 2 $\sum \sec\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\beta}{2}\geqslant 2(1+\sqrt{2})+\frac{4(1-\sqrt{2})r}{R}.$

参考文献

[1]单墫、胡大同,第 29 届 IMO 的备选题,数学通讯,1989,5 -8.

[2][荷兰]O. Bottema 等著,单墫译,几何不等式,北京大学出版社,1991.

三角形旁切圆半径的一组新的不等式

钟　威

广西玉林市蒲塘高中(537022)

关于三角形旁切圆半径的不等式，目前的研究十分活跃，得到了许多结果[1].

本文中，我们建立涉及三角形边长、中线与其旁切圆半径的一组新的不等式，并提出几个猜想.

1. 三角形边长与其旁切圆半径

设$\triangle ABC$的边长为a、b、c，对应旁切圆半径为r_a、r_b、r_c，则有如下定理：

定理1　$$(r_a+r_b)^2+(r_b+r_c)^2+(r_c+r_a)^2 \geqslant \frac{3}{4}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]. \quad (1)$$

证明　$$(r_a+r_b)^2+(r_b+r_c)^2+(r_c+r_a)^2-\frac{3}{4}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$$

$$=2(r_a+r_b+r_c)^2-2(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)-\frac{3}{2}(a+b+c)^2+\frac{3}{2}(ab+bc+ca)$$

$$=2(4R+r)^2-2S^2-6S^2+\frac{3}{2}(S^2+r^2+4Rr)$$

$$=\frac{1}{2}(64R^2+44Rr+7r^2-13S^2)$$

$$\geqslant\frac{1}{2}[64R^2+44Rr+7r^2-13(4R^2+4Rr+3r^2)]$$

$$=2(3R^2-2Rr-8r^2)$$

$$=2(3R+4r)(R-2r)\geqslant 0.$$

其中,最后一个不等号用了 Euler 不等式"$R\geqslant 2r$"(下同).

从而

$$(r_a+r_b)^2+(r_b+r_c)^2+(r_c+r_a)^2$$

$$\geqslant\frac{3}{4}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2].$$

定理 2 $(r_a-r_b)^2+(r_b-r_c)^2+(r_c-r_a)^2$

$$\geqslant\frac{3}{4}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]. \tag{2}$$

证明 $(r_a-r_b)^2+(r_b-r_c)^2+(r_c-r_a)^2-\frac{3}{4}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

$$=2(r_a+r_b+r_c)^2-6(r_ar_b+r_br_c+r_cr_a)-\frac{3}{2}(a+b+c)^2$$

$$+\frac{9}{2}(ab+bc+ca)$$

$$=2(4R+r)^2-6S^2-6S^2+\frac{9}{2}(r^2+S^2+4Rr)$$

$$=32R^2+22Rr+\frac{13}{2}r^2-\frac{15}{2}S^2$$

$$\geqslant 32R^2+34Rr+\frac{13}{2}r^2-\frac{15}{2}(4R^2+4Rr+3r^2)$$

$$=2R^2+4Rr-16r^2$$

$$=2(R+4r)(R-2r)\geqslant 0.$$

从而

$$(r_a-r_b)^2+(r_b-r_c)^2+(r_c-r_a)^2$$

$$\geqslant \frac{3}{4}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

定理 3 $$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)^2$$
$$\geqslant \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)^2\right]. \qquad (3)$$

证明 $$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)^2-\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)^2\right]$$
$$=2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2-2\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)$$
$$-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$
$$=\frac{2}{r^2}-\frac{8R+2r}{rS^2}-\frac{(S^2+r^2+4Rr)^2}{6R^2r^2S^2}+\frac{4}{3Rr}$$
$$=\frac{1}{6R^2r^2S^2}[-S^4+2(6R^2-r^2)S^2-48R^3r-8Rr^3-r^4$$
$$-28R^2r^2]$$
$$=\frac{1}{6R^2r^2S^2}[-(6R^2-r^2-S^2)^2+(6R^2-r^2)^2-r^4-48R^3r$$
$$-8Rr^3-28R^2r^2]$$
$$\geqslant \frac{1}{6R^2r^2S^2}\{-[6R^2-r^2-(16Rr-5r^2)]^2+(6R^2-r^2)^2$$
$$-r^4-48R^3r-8Rr^3-28R^2r^2\}$$
$$=\frac{4}{3R^2rS^2}(18R^3-43R^2r+15Rr^2-2r^3)$$
$$=\frac{4}{3R^2rS^2}(18R^2-7Rr+r^2)(R-2r)\geqslant 0.$$

从而

$$\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_a}\right)^2$$
$$\geqslant \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

定理 4 $\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)^2$

$$\geqslant\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right]. \qquad (4)$$

证明 $\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)^2$

$$-\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right]$$

$$=2\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)^2-6\left(\frac{1}{r_ar_b}+\frac{1}{r_br_c}+\frac{1}{r_cr_a}\right)$$

$$-\frac{8}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+8\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$$

$$=\frac{2}{r^2}-\frac{24R+6r}{rS^2}-\frac{(S^2+r^2+4Rr)^2}{6R^2r^2S^2}+\frac{4}{Rr}$$

$$=\frac{1}{6R^2r^2S^2}[-S^4+2(6R^2+8Rr-r^2)S^2-144R^3r-8Rr^3$$

$$-52R^2r^2-r^4]$$

$$=\frac{1}{6R^2r^2S^2}[-(6R^2+8Rr-r^2-S^2)^2+(6R^2+8Rr-r^2)^2$$

$$-144R^3r-8Rr^3-52R^2r^2-r^4]$$

$$\geqslant\frac{1}{6R^2r^2S^2}\{-[6R^2+8Rr-r^2-(16Rr-5r^2)]^2$$

$$+(6R^2+8Rr-r^2)^2-144R^3r-8Rr^3-52R^2r^2-r^4\}$$

$$=\frac{1}{6R^2r^2S^2}(48R^3r+40Rr^3-112R^2r^2-16r^4)$$

$$=\frac{4}{3R^2rS^2}(6R^3+5Rr^2-14R^2r-2r^3)$$

$$=\frac{4}{3R^2rS^2}(6R^2-2Rr+r^2)(R-2r)\geqslant 0.$$

从而

$$\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)^2+\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_c}\right)^2+\left(\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_a}\right)^2$$

$$\geqslant\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right].$$

2. 三角形中线长与旁切圆半径

设△ABC 的边长为 a、b、c，对应的中线长为 m_a、m_b、m_c，旁切圆半径为 r_a、r_b、r_c，则有如下的定理：

定理 5 $$\frac{r_a^k+r_b^k}{m_a^k+m_b^k}+\frac{r_b^k+r_c^k}{m_b^k+m_c^k}+\frac{r_c^k+r_a^k}{m_c^k+m_a^k}\geqslant 3\ (k\geqslant 1) \tag{5}$$

证明 式(5)为对称不等式，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则由三角形旁切圆半径公式

$$r_a=\frac{sr}{s-a},r_b=\frac{sr}{s-b},r_c=\frac{sr}{s-c}$$

(其中 s 为半周长，r 为内切圆半径，以下同)及中线长公式

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-3a^2},$$

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-3b^2},$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)-3c^2},$$

易知

$$r_a\geqslant r_b\geqslant r_c,m_a\leqslant m_b\leqslant m_c.$$

所以对 $k\geqslant 1$，有

$$r_a^k\geqslant r_b^k\geqslant r_c^k,m_a^k\leqslant m_b^k\leqslant m_c^k.$$

进而可知

$$r_a^k+r_b^k\geqslant r_c^k+r_a^k\geqslant r_b^k+r_c^k,$$

$$m_a^k+m_b^k\leqslant m_c^k+m_a^k\leqslant m_b^k+m_c^k.$$

于是，用文[2]的结论及切比晓夫不等式，得

$$\frac{r_a^k+r_b^k}{m_a^k+m_b^k}+\frac{r_c^k+r_a^k}{m_c^k+m_a^k}+\frac{r_b^k+r_c^k}{m_b^k+m_c^k}$$

$$\geqslant\frac{1}{3}(r_a^k+r_b^k+r_c^k+r_a^k+r_b^k+r_c^k)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{m_a^k+m_b^k}+\frac{1}{m_c^k+m_a^k}+\frac{1}{m_b^k+m_c^k}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\left[(m_a^k+m_b^k)+(m_c^k+m_a^k)+(m_b^k+m_c^k)\right]$$

$$\cdot\left(\frac{1}{m_a^k+m_b^k}+\frac{1}{m_c^k+m_a^k}+\frac{1}{m_b^k+m_c^k}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{3}\cdot 9=3.$$

即 $\dfrac{r_a^k+r_b^k}{m_a^k+m_b^k}+\dfrac{r_b^k+r_c^k}{m_b^k+m_c^k}+\dfrac{r_c^k+r_a^k}{m_c^k+m_a^k}\geqslant 3.$

定理 6 $(r_ar_b)^2+(r_br_c)^2+(r_cr_a)^2$

$$\geqslant (m_am_b)^2+(m_bm_c)^2+(m_cm_a)^2. \qquad (6)$$

证明 据三角形旁切圆半径及中线长公式

$$(r_ar_b)^2=[s(s-c)]^2$$

$$=\frac{1}{16}[(a+b+c)(a+b-c)]^2$$

$$=\frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4+4a^3b+4ab^3+6a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-4abc^2),$$

$$(r_br_c)^2=\frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4+4b^3c+4bc^3+6b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2-4a^2bc),$$

$$(r_cr_a)^2=\frac{1}{16}(a^4+b^4+c^4+4c^3a+4ca^3+6c^2a^2-2a^2b^2-2b^2c^2-4ab^2c),$$

$$(r_ar_b)^2+(r_br_c)^2+(r_cr_a)^2=\frac{1}{16}[3(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4(a^2bc+ab^2c+abc^2)],$$

$$(m_am_b)^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)\cdot\frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)$$

$$=\frac{1}{16}(5a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2+4c^4-2a^4-2b^4),$$

$$(m_bm_c)^2=\frac{1}{16}(5b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2+4a^4-2b^4-2c^4),$$

$$(m_c m_a)^2=\frac{1}{16}(5c^2a^2+2a^2b^2+2b^2c^2+4b^4-2c^4-2a^4),$$

$$(m_a m_b)^2+(m_b m_c)^2+(m_c m_a)^2=\frac{9}{16}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),$$

所以 $(r_a r_b)^2+(r_b r_c)^2+(r_c r_a)^2-[(m_a m_b)^2+(m_b m_c)^2+(m_c m_a)^2]$

$$=\frac{1}{16}[3(a^4+b^4+c^4)+4(a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+c^3a+ca^3)$$
$$-7(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4(a^2bc+ab^2c+abc^2)]$$

$$\geqslant\frac{1}{16}[4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4(a^2bc+ab^2c+abc^2)+4ab(a^2$$
$$+b^2)-8a^2b^2+4bc(b^2+c^2)-8b^2c^2+4ca(c^2+a^2)-8c^2a^2]$$

$$=\frac{1}{8}[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]+\frac{1}{4}[ab(a-b)^2$$
$$+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2]\geqslant 0$$

故 $(r_a r_b)^2+(r_b r_c)^2+(r_c r_a)^2\geqslant(m_a m_b)^2+(m_b m_c)^2+(m_c m_a)^2$.

3. 几个猜想

文末，我们提出如下猜想：

猜想 1 $\sum(r_b+r_c)^k\geqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k\sum(b+c)^k$，其中 $k>0$. (7)

猜想 2 $\sum(r_b r_c)^k\geqslant\sum(m_b m_c)^k$, (8)

其中 $\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\ln 2}\leqslant k\leqslant\frac{\ln 2}{\ln 9-\ln 8}$.

猜想 3 $\sum\frac{r_b^k+r_c^k}{m_b^k+m_c^k}\geqslant 3$，其中 $k\geqslant\log_2\frac{3}{2}$. (9)

参考文献

[1]O. Bottoma 等著，单墫译，几何不等式，北京大学出版社，1991.

[2]杨任尔，问题征解及评注(68)，数学通讯，1991(5)，1993(7).

[3]Zun Shan, Ji Chen and Marcin E. Kuczma, Problem 1680 and solutions, Crux Math. 17(1991), 238 and 18(1992), 250-253.

一个猜想的推广

文家金

四川安岳县第一中学(　　)

文献[1,P.223]提出猜想：

在$\triangle ABC$中，

$$\sum t_a^{-1} > \sum a^{-1}. \tag{1}$$

1993年，匡继昌[2,P.772]中将它列为100个未解决的问题(问题42).

由

$$t_a=\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}<\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-(b-c)^2)}}{b+c}=\frac{2bc}{b+c}$$

易知(1)成立.实际上(1)可加强为[4]：

$$\sum t_a^{-1} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sum a^{-1}. \tag{2}$$

本文证明(2)及更一般的结论，即

定理　设定义在R^+上的实函数$f_{(x)}$满足$f_{(x)}>0$，并且对$\triangle ABC$的边$a\leqslant b\leqslant c$，有

$$f_{(a)}(L-a^{-1})\leqslant f_{(b)}(L-b^{-1})\leqslant f_{(c)}(L-c^{-1}). \tag{3}$$

其中$L=\sum a^{-1}$，则对任意$\lambda>0$，

$$\sum\left(\frac{f_{(a)}}{t_a}\right)^{\lambda}\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\lambda}\sum\left(f_{(a)}(L-a^{-1})\right)^{\lambda}. \tag{4}$$

当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时，(4)中等号成立.

证明 $$\left(\frac{f_{(a)}}{t_a}\right)^{\lambda}=(f_{(a)}(L-a^{-1}))^{\lambda}\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{5}$$

由$a\leqslant b\leqslant c$，得

$$\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\leqslant\left(\frac{ca}{(c+a)^2-b^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\leqslant\left(\frac{ab}{(a+b)^2-c^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}. \tag{6}$$

因此，由切比雪夫不等式及(5)、(3)、(6)，得

$$\sum\left(\frac{f_{(a)}}{t_a}\right)^{\lambda}\geqslant\sum(f_{(a)}(L-a^{-1}))^{\lambda}\left(\frac{1}{3}\sum\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right). \tag{7}$$

由$\frac{\lambda}{2}>-1$及幂平均不等式，得

$$\frac{1}{3}\sum\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\geqslant\left(\frac{1}{3}\sum\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{-1}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}. \tag{8}$$

由(7)、(8)可知，只需证明

$$\left(\frac{1}{3}\sum\left(\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}\right)^{-1}\right)^{-\frac{\lambda}{2}}\geqslant\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\lambda}. \tag{9}$$

(9)等价于

$$\sum\frac{(b+c)^2-a^2}{bc}\leqslant 9, \tag{10}$$

这是一个熟知的不等式(例如经过变形后(10)化为

$$\sum(a-b-c)(b-c)^2\leqslant 0).$$

推论1 若$0<\lambda\leqslant 1$，则对任意三角形ABC，有

$$\sum t_a^{-\lambda}\geqslant\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\lambda}\sum a^{-\lambda}. \tag{11}$$

当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时，等式成立.

证明 在定理中置$f_{(x)}\equiv 1$，得

$$\sum t_a^{-\lambda}\geqslant(\sqrt{3})^{-\lambda}\sum(b^{-1}+c^{-1})^{\lambda}. \tag{12}$$

由$0<\lambda\leqslant 1$及幂平均不等式，

$$\sum(b^{-1}+c^{-1})^{\lambda}\geqslant\sum 2^{\lambda-1}(b^{-\lambda}+c^{-\lambda})=2^{\lambda}\sum b^{-\lambda}. \tag{13}$$

由(12)、(13)立得(11).

在推论 1 中令 $\lambda=1$ 就得到(2).

推论 2 若 $1<\lambda<\frac{\ln 4}{\ln 3}$,则对任意三角形 ABC,有

$$\sum t_a^{-\lambda}>\sum a^{-\lambda}. \tag{14}$$

证明 因为 $\lambda>1$,所以

$$\left(\frac{b^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}\right)^{\lambda}+\left(\frac{c^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}\right)^{\lambda}<\frac{b^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}+\frac{c^{-1}}{b^{-1}+c^{-1}}=1.$$

即

$$(b^{-1}+c^{-1})^{\lambda}>b^{-\lambda}+c^{-\lambda}. \tag{15}$$

由(12)、(15)及 $\lambda\leqslant\frac{\ln 4}{\ln 3}$,得

$$\begin{aligned}\sum t_a^{-\lambda}&\geqslant(\sqrt{3})^{-\lambda}\sum(b^{-\lambda}+c^{-\lambda})\\&=\frac{2}{(\sqrt{3})^{\lambda}}\sum a^{-\lambda}\geqslant\sum a^{-\lambda}.\end{aligned}$$

显然推论 2 推广了猜想(1).

推论 3 在$\triangle ABC$ 中,有

$$\Pi t_a\leqslant 3\sqrt{3}/\Pi(b^{-1}+c^{-1}), \tag{16}$$

当且仅当$\triangle ABC$ 是正三角形时等号成立.

证明 由定理,对 $\lambda>0$,有

$$\left(\frac{1}{3}\sum t_a^{-\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\sum(b^{-1}+c^{-1})^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

令 $\lambda\to 0$ 即得(16).

(16)是[2,P.236]76(25)的加强.

参考文献

[1]D. S. Mitrinović Pečarić, J. E. Volonec, V. Recent Advances in Geometric Inequalities, 1989.

[2]匡继昌,常用不等式,湖南教育出版社,1993年5月第2版.

[3]O. Bottema 等,几何不等式,单墫译,北京大学出版社,1991.

[4]王振,陈计,两个猜想不等式的加强及其它,中学教研(数学版),1994年第7 8期,51—53.

关于三角形远切圆不等式

孙建斌

福建泉州市永春县科委 (362600)

定义 与三角形两边延长线及其外接圆相切的圆，叫做三角形的远切圆(即"外半切圆")．$\triangle ABC$ 有三个远切圆，其半径分别记为 R_a、R_b、R_c，其中：

R_a：与 AB、AC 延长线及外接圆相切的圆半径；

R_b：与 BC、BA 延长线及外接圆相切的圆半径；

R_c：与 CA、CB 延长线及外接圆相切的圆半径．

文[1]推证了$\triangle ABC$ 远切圆半径 R_a、R_b、R_c 与旁切圆半径 r_a、r_b、r_c 的关系式：

$$R_a=\frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}},R_b=\frac{r_b}{\cos^2\frac{B}{2}},R_c=\frac{r_c}{\cos^2\frac{C}{2}}.$$

本文在[1]、[2]的基础上，比较系统地给出$\triangle ABC$ 的旁切圆、远切圆的半径表达式；进一步较系统地提出包含远切圆半径的三角形不等式．

1. r_a、r_b、r_c；R_a、R_b、R_c 的表达式

(1) $\triangle ABC$ 旁切圆半径 r_a 的表达式：

$$r_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}},\qquad r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$r_a=r\mathrm{ctg}\,\frac{B}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}$, $\quad r_a=s\cdot\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}$,

$r_a=4Rs(s-b)(s-c)/abc$, $\quad r_a=(s-b)\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}$,

$r_a=\frac{S_{\triangle}}{s-a}$, $\quad r_a=\frac{h_a\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$,

$r_a=\frac{a}{\mathrm{tg}\,\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\,\frac{C}{2}}$, $\quad r_a=\frac{1}{\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}}$,

$r_a=\sqrt{\frac{bcs}{s-a}}\cdot\sin\frac{A}{2}$, $\quad r_a=r+a\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}$,

$r_a=(b+c)\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}-r$, $\quad r_a=\frac{h_a r}{h_a-2r}$,

$r_a=\frac{t_a\cdot(b+c)\sqrt{bc(s-b)(s-c)}}{2bc(s-a)}$, ….

(2) $\triangle ABC$ 远切圆半径 R_a 的表达式:

$R_a=\frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}}$, $\quad R_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}/\cos^2\frac{A}{2}$,

$R_a=4R\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}/\cos\frac{A}{2}$, $\quad R_a=\frac{bc}{s-a}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$,

$R_a=\frac{bc}{s-a}\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}$, $\quad R_a=\frac{bcr}{(s-a)^2}$,

$R_a=\frac{4R(s-b)(s-c)}{a(s-a)}$, $\quad R_a=\frac{4Rs}{a}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}$,

$R_a=(s-b)\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}/\cos^2\frac{A}{2}$, $\quad R_a=\frac{4r_a\cdot b^2c^2}{t_a^2(b+c)^2}$,

$R_a=\frac{r\mathrm{ctg}\,\frac{B}{2}\mathrm{ctg}\,\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}$, $\quad R_a=\frac{h_a\mathrm{tg}\,\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$,

$$R_a=\frac{2Rh_a}{r}\cdot \mathrm{tg}^2\frac{A}{2},\qquad R_a=\frac{4r_a\cdot bc}{4m_a^2-(b-c)^2},$$

$$R_a=\sqrt{\frac{bcs}{s-a}}\cdot \mathrm{tg}\frac{A}{2}\sec\frac{A}{2},\cdots.$$

以上各式均呈对称轮换，故 r_b、r_c 及 R_b、R_c 读者易得之.

2. 包含 R_a、R_b、R_c 的三角形不等式

(1)含 R_a、R_b、R_c 及三边 a、b、c 的三角形不等式.

定理Ⅰ 在△ABC 中，有

$$abc\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}R_aR_bR_c.$$

证明

$$\begin{aligned}abc&=2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C\\&=64R^3\cdot\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\\&=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}\\&\quad\cdot\frac{4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\\&=R_aR_bR_c\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8}R_aR_bR_c.\end{aligned}$$

证毕.

(2)含 R_a、R_b、R_c 及外半径 R 的三角形不等式.

定理Ⅱ 在△ABC 中，有

$$R_aR_bR_c\leqslant 8R^3.$$

证明 $R_aR_bR_c=\dfrac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\dfrac{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{B}{2}}$

$$\cdot \frac{4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

$$=64R^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 64R^3\cdot\frac{1}{8}=8R^3.$$

证毕.

(3)含 R_a、R_b、R_c 及旁切圆半径 r_a、r_b、r_c 的三角形不等式.

定理Ⅲ 在$\triangle ABC$中,有

$$\frac{r_a}{R_a}+\frac{r_b}{R_b}+\frac{r_c}{R_c}\leqslant\frac{9}{4}.$$

证明 注意到

$$R_a=\frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}},R_b=\frac{r_b}{\cos^2\frac{B}{2}},R_c=\frac{r_c}{\cos^2\frac{C}{2}},$$

立得

$$\frac{r_a}{R_a}+\frac{r_b}{R_b}+\frac{r_c}{R_c}=\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4}.$$

证毕.

定理Ⅳ 在$\triangle ABC$中,有

$$R_aR_bR_c\geqslant\frac{64}{27}r_ar_br_c.$$

证明 $R_aR_bR_c=\frac{r_a}{\cos^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{r_b}{\cos^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{r_c}{\cos^2\frac{C}{2}}$

$$=\frac{r_ar_br_c}{\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}$$

$$\geqslant\frac{r_ar_br_c}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\frac{64}{27}r_ar_br_c.$$

证毕.

(4)含 R_a、R_b、R_c 及 R，r，r_a、r_b、r_c 的三角形不等式.

定理Ⅴ 在△ABC 中，有

$$R\geqslant\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{R_aR_bR_c}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{r_ar_br_c}\geqslant 2r.$$

证明 依定理Ⅱ、Ⅳ及熟知的 $r_ar_br_c\geqslant 27r^3$，立得

$$8R^3\geqslant R_aR_bR_c\geqslant\frac{64}{27}r_ar_br_c\geqslant 64r^3,$$

即知

$$R\geqslant\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{R_aR_bR_c}\geqslant\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{r_ar_br_c}\geqslant 2r.$$

证毕.

这就是著名的 Euler 不等式 $R\geqslant 2r$ 关于 R_a、R_b、R_c 及 r_a、r_b、r_c 的一个隔离形式.

(5)含 R_a、R_b、R_c 及高 h_a、h_b、h_c 的三角形不等式.

定理Ⅵ 在△ABC 中，有

$$\frac{R_a}{h_a}+\frac{R_b}{h_b}+\frac{R_c}{h_c}\geqslant 4.$$

证明 $\because R_a=\dfrac{h_a\sin\dfrac{A}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$

$$=\frac{4Rh_a\sin^2\dfrac{A}{2}}{2\cos^2\dfrac{A}{2}\cdot 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}$$

$$=\frac{2Rh_a}{r}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{A}{2},$$

$\therefore \dfrac{R_ar}{2Rh_a}=\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2}$；同理 $\dfrac{R_br}{2Rh_b}=\mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2}$，$\dfrac{R_cr}{2Rh_c}=\mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2}$，

于是

$$\frac{R_ar}{2Rh_a}+\frac{R_br}{2Rh_b}+\frac{R_cr}{2Rh_c}=\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1,$$

立得

$$\frac{R_a}{h_a}+\frac{R_b}{h_b}+\frac{R_c}{h_c}\geqslant\frac{2R}{r}\geqslant 4.$$

证毕.

我们指出,以上各不等式均当且仅当正三角形时等号成立.

当然,我们尚可以得出一系列包含 R_a、R_b、R_c 及半周长 s;中线 m_a、m_b、m_c;内角平分线 t_a、t_b、t_c 及面积 $S_\triangle$ 的新三角形不等式,如

$$\sum\frac{(s-a)R_a}{bc}\geqslant\sqrt{3};\ \sum aR_am_a^2\geqslant 9r\Pi a;$$

$$\sum R_at_a^2\leqslant\sum(r_a\cdot bc);\ \sum aR_a\geqslant 8S_\triangle;\ S_\triangle\leqslant\frac{16R^2s^3}{27\Pi R_a};$$

等.

参考文献

[1]熊光汉,三角形的外半切圆及其性质,中学教研(数学),1993(3).

[2]孙建斌,包含 r、r_a、r_b、r_c 的几何计算,中学数学教学(安徽),1991(6).

[3]杨世明,三角形趣谈,上海教育出版社,1989.

[4]孙建斌,巧用统一代数替换法证明三角形不等式,数学通报,1991(10).

[5]孙建斌,等价法证明三角形不等式,中学数学教学参考,1992(7).

[6]孙建斌、陈友邦,三角形不等式的结构及证明的两条规律,福建中学数学,1993(1).

[7]孙建斌、陈友邦,对偶等价法证明三角形不等式,中学数学教学参考,1993(9).

[8]孙建斌、邱世灿,用等式证明三角形不等式,中学生数学,1993(3).

关于 R,r 与 s 的锐角三角形不等式

陈胜利

福建南安市五星中学(362341)

设 R,r 与 s 是 $\triangle ABC$ 的“三基本量”(即外、内半径及半周长),则有如下“基本不等式”[1,2]:

$$F_1(R,r)\equiv 2R^2+10Rr-r^2-2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}\leqslant s^2 \quad (1)$$

$$\leqslant 2R^2+10Rr-r^2+2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}$$

$$\equiv F_2(R,r). \quad (2)$$

(1)、(2)取等号当且仅当 $\triangle ABC$ 分别为顶角 $\geqslant 60°$ 和 $\leqslant 60°$ 的等腰三角形.

据此,笔者曾应用构造法证明了下面有趣的命题.

命题[2]　形如

$$s\geqslant f(R,r) \quad (3)$$

的不等式对任意三角形成立,当且仅当它对顶角 $\geqslant 60°$ 的等腰三角形成立;

形如

$$s\leqslant f(R,r) \quad (4)$$

的不等式对任意三角形成立,当且仅当它对顶角 $\leqslant 60°$ 的等腰三角形成立.

由于锐角三角形包含所有顶角 $\leqslant 60°$ 的等腰三角形,因而形如

(4)的不等式对锐角三角形成立与对一般三角形成立是等价的.但形如(3)的不等式则不然.这预示,仅对锐角三角形成立的形如(3)的不等式应有区别于一般三角形的特殊形式和证法.

事实上,将一般三角形的基本不等式(1)、(2)与关于锐角三角形的 Ciamberlini 不等式[3]:

$$s>2R+r \tag{5}$$

结合起来,即可得到关于锐角三角形的"基本不等式":

$$F_2(R,r)\geqslant s^2\begin{cases}\geqslant F_1(R,r)>(2R+r)^2 \\ \quad (2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r), & (6\text{-}1)\\ >(2R+r)^2\geqslant F_1(R,r) \\ \quad (R\geqslant(\sqrt{2}+1)r). & (6\text{-}2)\end{cases}$$

它是以 R,r 与 S 为三基本量的锐角三角形存在的充要条件.与(1)、(2)一样,(6-1)、(6-2)"是我们可以应用的最好条件,它不仅不能被改进,而且就本质而言,其它关于 R,r 与 S 的不等式都是它的推论"[1].

据此,循着文[2]的思路,我们又发现了如下有趣的定理.

定理 1 形如(3)的不等式对任意锐角三角形成立,当且仅当它对顶角$\geqslant 60°$的锐角等腰三角形(这时 $2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r$)和对直角三角形(这时 $R\geqslant(\sqrt{2}+1)r$)成立.

证明 1°对满足 $2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r$ 的锐角$\triangle ABC$,我们可作出它的外接圆的内接等腰$\triangle A_1B_1C_1$,使其顶角为

$$A_1=2\arcsin\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2r}{R}}\right).$$

易知 $60°\leqslant A_1<90°$,且 $R_1=R,r_1=r,s_1\leqslant s$(参见[2]引理 2),从而若(3)对顶角$\geqslant 60°$的锐角等腰三角形成立,则有

$$s\geqslant s_1\geqslant f(R_1,r_1)=f(R,r).$$

2°对满足 $R\geqslant(\sqrt{2}+1)r$ 的锐角$\triangle ABC$,我们可作出它的内

切圆的外切直角$\triangle A_2B_2C_2$，使其斜边为

$$c_2=2R,$$

则

$$r_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2-c_2)=r, R_2=\frac{1}{2}c_2=R,$$

$$s_2=\frac{1}{2}(a_2+b_2+c_2)=2R_2+r_2=2R+r<s$$

(显见 $R_2\geqslant(\sqrt{2}+1)r_2$，即 $R\geqslant(\sqrt{2}+1)r$)从而若(3)对直角三角形成立，则有

$$s>s_2\geqslant f(R_2,r_2)=f(R,r).$$

综上，充分性得证，必要性显然(证毕).

推论 1 齐次不等式(3)对锐角$\triangle ABC$成立，当且仅当

$$f(1,2t(1-t))\leqslant\begin{cases}2(1+t)\sqrt{1-t^2}\ (1/2\leqslant t<\sqrt{2}/2), & (7\text{-}1)\\ 2+2t(1-t)\ (\sqrt{2}/2\leqslant t<1). & (7\text{-}2)\end{cases}$$

证明 由齐次性可令 $R=1$，而据定理知

1° 当 $2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r$ 的，只要考虑顶角 $A\in[\pi/3,\pi/2)$ 的等腰三角形即可. 令

$$t=\sin\frac{A}{2}\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

可得(参见文[2])

$$r=2t(1-t), s=2(1+t)\sqrt{1-t^2}.$$

于是这时(3)⇔(7-1)；

2° 当 $R\geqslant(\sqrt{2}+1)r$ 时，只要考虑直角三角形即可. 令

$$r=r/R=2t(1-t)\in(0,\sqrt{2}-1)\quad(\sqrt{2}/2\leqslant t<1),$$

得

$$s=2R+r=2+2t(1-t),$$

则这时(3)⇔(7-2) (证毕).

应用基本不等式(6),我们得到了下面一个十分有用的定理.

定理 2 二次不等式

$$s^2 \geqslant \lambda R^2 + \mu Rr + (27 - 4\lambda - 2\mu) r^2, \tag{8}$$

对锐角三角形成立的必要条件是

$$\lambda \leqslant 4, \tag{9}$$

$$\mu \leqslant 2(7+\sqrt{2}) - \lambda(3+\sqrt{2}). \tag{10}$$

充分条件是(10)式以及

$$2(1-\sqrt{2}) \leqslant \lambda \leqslant 4. \tag{11}$$

特别地,当(10)取等号,即

$$\mu = 2(7+\sqrt{2}) - \lambda(3+\sqrt{2}) \tag{10'}$$

时,(8)化为

$$s^2 \geqslant H_\lambda(R,r) \equiv \lambda R^2 + [2(7+\sqrt{2}) - \lambda(3+\sqrt{2})]Rr - [(1+4\sqrt{2}) - 2\lambda(1+\sqrt{2})]r^2. \tag{8'}$$

则(8′)成立的充要条件是(11)式成立.

证明 考虑锐角三角形的退化状态——直角三角形知,若(8)成立,应有

$$(2R+r)^2 \geqslant \lambda R^2 + \mu Rr + (27-4\lambda-2\mu)r^2, \frac{r}{R} \in (0, +\infty).$$

令 $r/R \to 0$ 及 $R=(\sqrt{2}+1)r$,即知(9)、(10)是(8)成立的必要条件.

为证(10)及(11)是(8)成立的充分条件,而(11)是(8′)成立的充分必要条件,我们将条件(10)改写为

$$\mu = 2(7+\sqrt{2}) - \lambda(3+\sqrt{2}) - \mu_0, \mu_0 \geqslant 0. \tag{10'}$$

则(8)即为

$$s^2 \geqslant H_\lambda(R,r) - \mu_0 R(R-2r) (\mu_0 R(R-2r) \geqslant 0).$$

比较上式及(8′)式,我们只须证(11)是(8′)的充要条件即可.

1° 若 $R \geqslant (\sqrt{2}+1)r$,由基本不等式(6-2)或定理 1,知

$$(8')\Leftrightarrow(2R+r)^2\geqslant H_\lambda(R,r)$$
$$\Leftrightarrow[R-(1+\sqrt{2})r][(4-\lambda)R-2(3-\sqrt{2}-\lambda)r]$$
$$\geqslant 0. \qquad (12)$$

由于 $R\geqslant(1+\sqrt{2})r$，则当 $\lambda\leqslant 4$ 时，有

$$(4-\lambda)R-2(3-\sqrt{2}-\lambda)r$$
$$\geqslant(4-\lambda)(1+\sqrt{2})r-2(3-\sqrt{2}-\lambda)r$$
$$=[(6\sqrt{2}-2)-\lambda(\sqrt{2}-1)]r$$
$$\geqslant[(6\sqrt{2}-2)-4(\sqrt{2}-1)]r>0,$$

(12)式成立，从而(8′)也成立；又前面已证，若(8′)成立，应有 $\lambda\leqslant 4$. 故这时(8′)成立的充要条件是 $\lambda\leqslant 4$.

2° 若 $2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r$，由(6-1)知

$$(8')\Leftrightarrow H_\lambda(R,r)\leqslant F_1(R,r)$$
$$\Leftrightarrow(R-2r)[(2-\lambda)R-(2\sqrt{2}-\lambda-\lambda\sqrt{2})r]$$
$$\geqslant 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)}. \qquad (13)$$

显见 $R=2r$ 时上式成立，$2r<R<(\sqrt{2}+1)r$ 时，则化为

$$(2-\lambda)R-[2\sqrt{2}-\lambda(1+\sqrt{2})]r\geqslant 2\sqrt{R(R-2r)}. \qquad (13')$$

i)当 $\lambda\geqslant 2$ 时，(13′)式：

$$左\geqslant(2-\lambda)(\sqrt{2}+1)r-[2\sqrt{2}-\lambda(1+\sqrt{2})]r=2r$$
$$=2\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1-2)r^2}>右；$$

ii)当 $\lambda<2$ 时，令 $R\to 2r$，则由(13′)可得必要条件

$$2(2-\lambda)r-[2\sqrt{2}-\lambda(1+\sqrt{2})]r\geqslant 0,$$

即

$$-2\sqrt{2}\leqslant\lambda<2.$$

在此条件下，易知(13′)左$\geqslant 0$，于是可平方，整理为等价形式：

$$[R-(\sqrt{2}+1)r]\{\lambda(\lambda-4)R-[(\sqrt{2}+1)\lambda^2-4\sqrt{2}\lambda$$

$+8(\sqrt{2}-1)]r\}\geqslant 0.$

记式中$\{\cdots\}$为$f_\lambda(R,r)$，则上式成立当且仅当

$$f_\lambda(R,r)\leqslant 0（其中 2r<R<(\sqrt{2}+1)r,-2\sqrt{2}\leqslant\lambda<2）.$$

视$\frac{f_\lambda(R,r)}{r}$为关于R/r的一次或常函数，则上式成立需且只须

$$\begin{cases} f_\lambda(2r,r)=(1-\sqrt{2})(\lambda+2\sqrt{2})^2 r\leqslant 0, \\ f_\lambda((\sqrt{2}+1)r,r)=-4[\lambda-2(1-\sqrt{2})]r\leqslant 0. \end{cases}$$

即

$$2(1-\sqrt{2})\leqslant\lambda<2.$$

由 i)，ii)知，这时(8′)成立的充要条件是$\lambda\geqslant 2(1-\sqrt{2})$.

综合 1°、2°即得欲证.

推论 2[4,5]　使锐角三角形不等式

$$s\geqslant KR+(3\sqrt{3}-2K)r, \tag{14}$$

$$s^2\geqslant K'Rr+(27-2K')r^2 \tag{15}$$

成立的最大常数分别为

$$K=(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-3\sqrt{3})=1.52644616\cdots \tag{14'}$$

$$K'=2(7+\sqrt{2})=16.8284271\cdots \tag{15'}$$

证明　不妨设$K\geqslant 0$，则(14)等价于

$$s^2\geqslant K^2R^2+2K(3\sqrt{3}-2K)Rr+(3\sqrt{3}-2K)^2r^2.$$

于是据定理 2 知上式成立，当且仅当

$$K^2\leqslant 4 且 2K(3\sqrt{3}-2K)\leqslant 2(7+\sqrt{2})-K^2(3+\sqrt{2}),$$

即

$$0\leqslant K\leqslant(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}-3\sqrt{3}).$$

又在(8)中令$\lambda=0$，$\mu=K'$，即知(15)成立当且仅当$K'\leqslant 2(7+\sqrt{2})$. 故得(14′)与(15′).

类似地，在(8′)中分别令$\lambda=1,2,3,4$，以及$\lambda=2(1-\sqrt{2})$

$<0, \lambda=\frac{2}{7}(19-4\sqrt{2})=3.8123\cdots$，可得

推论 3 在锐角$\triangle ABC$中，有

$$s^2 \geqslant R^2+(11+\sqrt{2})Rr+(1-2\sqrt{2})r^2 \tag{16}$$

$$s^2 \geqslant 2R^2+8Rr+3r^2 \text{(Walker 不等式)}, \tag{17}$$

$$s^2 \geqslant 3R^2+(5-\sqrt{2})Rr+(5+2\sqrt{2})r^2, \tag{18}$$

$$s^2 \geqslant 4R^2+(2-2\sqrt{2})Rr+(7+4\sqrt{2})r^2, \tag{19}$$

$$s^2 \geqslant (2-2\sqrt{2})R^2+(12+6\sqrt{2})Rr -(5+4\sqrt{2})r^2, \tag{20}$$

$$s^2 \geqslant \frac{2}{7}(19-4\sqrt{2})(R^2-4r^2)+27r^2. \tag{21}$$

等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

另外，由$R\geqslant 2r$还可得到比(16)，(18)，(19)稍弱的不等式：

$$s^2 \geqslant R^2+12Rr-r^2=(R-2r)(R+14r)+27r^2, \tag{16'}$$

$$s^2 \geqslant 3R^2+3Rr+9r^2=3(R-2r)(R+3r)+27r^2, \tag{18'}$$

$$s^2 \geqslant 4R^2-Rr+13r^2=(R-2r)(4R+7r)+27r^2. \tag{19'}$$

顺便指出，在形如(8′)的不等式中，由于

$$H_{\lambda_1}(R,r)-H_{\lambda_2}(R,r)=(\lambda_1-\lambda_2)(R-2r)[R-(\sqrt{2}+1)r], \tag{20'}$$

故当$2(1-\sqrt{2})\leqslant\lambda_1<\lambda_2\leqslant 4$时，有

$$s^2 \geqslant \begin{cases} H_{\lambda_1}(R,r)\geqslant H_{\lambda_2}(R,r) & (2r\leqslant R<(\sqrt{2}+1)r), \quad (21\text{-}1) \\ H_{\lambda_2}(R,r)\geqslant H_{\lambda_1}(R,r) & (R\geqslant(\sqrt{2}+1)r). \quad (21\text{-}2) \end{cases}$$

因此，$s^2\geqslant H_{2(1-\sqrt{2})}(R,r)$及$s^2\geqslant H_4(R,r)$是值得注意的两个重要不等式.

下面略举一例说明定理 1 的应用.

例 试求使不等式

$$\sum a^2 \leqslant 4\sqrt{3}\Delta+\lambda\sum(b-c)^2 \tag{22}$$

对任意锐角三角形 ABC 均成立的最小 λ.

解 易知(22)可化为形如(3)的不等式. 于是据定理 1,只要考虑$\triangle ABC$ 为直角三角形和顶角 $A\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$的等腰三角形即可.

对 Rt$\triangle ABC$,不妨设 $c=1,a=\sin\theta,b=\cos\theta,0<\theta<\frac{\pi}{2}$,则(22)化为

$$(\sqrt{3}-\lambda)\sin\theta\cos\theta-\lambda(\sin\theta+\cos\theta)+2\lambda-1\geqslant 0. \qquad (23)$$

令 $\theta=\pi/4$,得

$$\lambda\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)^2(\sqrt{3}-1)^2 \xlongequal{\text{记}} \lambda_0=1.56172234\cdots \qquad (24)$$

而当 $\lambda=\lambda_0$ 时,(23)即为

$$(\sqrt{3}-\lambda_0)^2\sin^2 2\theta-4[3\lambda_0^2-(1+2\sqrt{3})\lambda_0+\sqrt{3}]$$
$$\cdot\sin 2\theta+4(3\lambda_0^2-4\lambda_0+1)\geqslant 0.$$

上式当 $\sin 2\theta=1$ 时取等号,则左边有因式 $\sin 2\theta-1\leqslant 0$,因而只要证明另一因式:

$$(3-\lambda_0)^2\sin 2\theta-4(3\lambda_0^2-4\lambda_0+1)\leqslant 0.$$

由 $\sin 2\theta\leqslant 1$ 及 λ_0 的值经计算即知上式成立.

对顶角 $A\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$的等腰$\triangle ABC$,不妨设 $b=c=1,a=2t$, $1/2\leqslant t<\sqrt{2}/2$,则当 $\lambda=\lambda_0$ 时,(22)可化为

$$2(1-2\lambda_0)t^2+4\lambda_0 t+1-\lambda_0\leqslant 2t\sqrt{3(1-t^2)}.$$

平方,整理,分解(注意 $t=1/2$、$\sqrt{2}/2$ 时上式取等号),得

$$16(\lambda_0^2-\lambda_0+1)t^4-16(2\lambda_0^2-\lambda_0)t^3+4(6\lambda_0^2-3\lambda_0-2)t^2$$
$$-8(\lambda_0^2-\lambda_0)t+(\lambda_0^2-2\lambda_0+1)\leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow(2t-1)(2t-\sqrt{2})\cdot d(t)\leqslant 0 \qquad (25)$$

式中 $d(t)=(4\lambda_0^2-4\lambda_0+4)t^2+[(2\sqrt{2}-6)\lambda_0^2+(2-2\sqrt{2})\lambda_0$

$+(2+2\sqrt{2})]t+\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_0^2-2\lambda_0+1) \quad (1/2\leqslant t<\sqrt{2}/2)$

由 λ_0 的值经计算知

$$d(t)\geqslant(4\lambda_0^2-4\lambda_0+4)\left(\frac{1}{2}\right)^2+[(2\sqrt{2}-6)\lambda_0^2+(2-2\sqrt{2})\lambda_0+(2+2\sqrt{2})]\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_0^2-2\lambda_0+1)>0,$$

故(25)成立.

综上知使(22)成立的最小 $\lambda=\lambda_0=1.56172234\cdots$.

文[4]猜测当 $\lambda=\frac{16}{9}$ 时(22)成立,这里我们给出了这一猜测的加强.用其它方法来解决这一问题是甚为繁难的.

最后顺便指出,应用定理 1 及推论 1,我们还解决了石世昌[6]最近提出的如下问题:

求最佳的系数,使不等式

$$\sum\cos\frac{A-B}{2}\geqslant p\sum\cos\frac{A}{2}+q\sum\sin A \tag{26}$$

对任意△ABC 均成立.

事实上,作角变换:

$$(A,B,C)\to(\pi-2A,\pi-2B,\pi-2C),$$

知(26)等价于锐角△ABC 中的不等式:

$$\sum\cos(A-B)\geqslant p\sum\sin A+q\sum\sin 2A. \tag{26'}$$

将(26′)化为关于 R,r 与 s 的不等式后,即可求得两组不分优劣的最佳系数

$$(p_1,q_1)=\left(\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})(3+3\sqrt{2}-4\sqrt{3}),\frac{1}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{2})^2(1-\sqrt{3})^2\right),$$

$$(p_2,q_2)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}(1+\sqrt{2})\right).$$

对此,笔者已另文阐述.

参考文献

[1]O. Bottema 著,陈聪杰、陈计、陈胜利译,关于 R,r 与 s 的不等式,初等数学前沿(第一辑),江苏教育出版社,1995.

[2]陈胜利,证明一类不等式的新方法——等量替换法,福建中学数学,3(1993).

[3]C. Ciamberlini, sulla condizione necessaria esufficiente affinche un triangoto sia acutangolo o ottusangolo, Bull. Un. Mat. Ital., (2)5(1943), 37—41.

[4]刘健,100 个待解决的三角形不等式问题,全国几何不等式学术研讨会论文(南京,1994).

[5]朱再宇、陈计,关于锐角三角形的一个不等式,中国中学数学教师优秀论文集第 2 卷,贵州教育出版社,1995,177—178.

[6]石世吕,关于一个三角形不等式猜想的证明,中学数学(湖北),4(1995).

Hadwiger 不等式的探讨

单 墫

南京师范大学数学系(210097)

在$\triangle ABC$中,用Δ表示面积,

$$Q=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2, \tag{1}$$

则有

$$4\sqrt{3}\Delta+Q\leqslant a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+3Q. \tag{2}$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

(2)是 1937 年,P. Finsler 与 H. Hadwiger 证明的.其中左边的不等式是 Weitzenböck 不等式的加强,不少书中都有介绍.右边不等式的证明较为罕见.江西华东交通大学刘健先生对最大角$\leqslant 120°$的三角形,将(2)的右边加强为

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+2Q, \tag{3}$$

并猜测对锐角三角形,有

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+\frac{16}{9}Q. \tag{4}$$

本文将证明下面的定理.

定理 若$\triangle ABC$的最大角$A\leqslant\phi$,则

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+\lambda Q. \tag{6}$$

其中

$$\lambda=\frac{2-2\sin(\phi+30^\circ)}{(2\sin\frac{\phi}{2}-1)^2} \tag{7}$$

是 ϕ 的增函数.

推论 1 (2)式右边的不等式成立.

推论 2 若△ABC 是锐角三角形,则

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)^2Q. \tag{8}$$

推论 3 若△ABC 的最大角 $A\leqslant 120^\circ$,则

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+\frac{\sqrt{3}+2}{2}Q. \tag{9}$$

由于

$$(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)^2$$
$$=1.5617\cdots<\frac{16}{9}=1.7777\cdots,$$
$$\frac{\sqrt{3}+2}{2}=1.8660\cdots<2,$$

所以(8)优于(4),(9)优于(3).

以下令 $\lambda\geqslant\frac{4}{3}$,得

$$F_{(\lambda)}=4\sqrt{3}\Delta+\lambda Q-a^2-b^2-c^2. \tag{10}$$

以 a 为底作含角为 A 的弓形弧,将 A 点移至弓形弧的中点 A'. 显然 $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$ 增加,因而积 bc 增加. 由余弦定理,得

$$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=a^2+2bc(1+\cos A). \tag{11}$$

所以 $b+c$ 也增加. 经简单的恒等变形,得

$$\begin{aligned}F_{(\lambda)}&=2\sqrt{3}bc\sin A+(2\lambda-1)(a^2+b^2+c^2)-2\lambda a(b+c)-2\lambda bc\\&=(2\lambda-1)(b+c)^2-2\lambda a(b+c)+2bc(\sqrt{3}\sin A-\lambda\\&\quad-(2\lambda-1))+(2\lambda-1)a^2\end{aligned}$$

$$=\left(2\lambda-1+\frac{\sqrt{3}\sin A-3\lambda+1}{1+\cos A}\right)(b+c)^2-2\lambda a(b+c)+\cdots \tag{12}$$

(12)的右边是 $b+c$ 的二次函数(常数项省略未写)$f(b+c)$.易知

$$\frac{1+\cos A}{2(b+c)}f'_{(b+c)}$$

$$=\sqrt{3}\sin A-\cos A-\lambda(1-2\cos A)-\lambda\cdot\frac{a}{b+c}(1+\cos A)$$

$$\leqslant\sqrt{3}\sin A-\cos A-\lambda(1-2\cos A)-\frac{\lambda}{2}(1+\cos A)$$

$$=\sqrt{3}\sin A-\cos A-\frac{3}{2}\lambda(1-\cos A)$$

$$\leqslant\sqrt{3}\sin A-\cos A-2(1-\cos A)\text{(因为 }\lambda\geqslant\frac{4}{3}\text{)}$$

$$=2\sin(A+30°)-2\leqslant 0$$

所以在点 A 移至 A' 时,$F_{(\lambda)}$减少.从而欲证

$$F_{(\lambda)}\geqslant 0, \tag{13}$$

可以假定 $b=c$.

此时令 $A=2\alpha$,则

$$\Delta=\frac{1}{2}b^2\sin 2\alpha, a=2b\sin\alpha,$$

$$F_{(\lambda)}=4\sqrt{3}\Delta+2\lambda(a-b)^2-2b^2-a^2$$

$$=2b^2(\sqrt{3}\sin 2\alpha-1-2\sin^2\alpha+\lambda(1-2\sin\alpha)^2)$$

$$=2b^2(-2+2\sin(2\alpha+30°)+\lambda(1-2\sin\alpha)^2)$$

因此,(13)等价于

$$\lambda\geqslant\frac{2-2\sin(2\alpha+30°)}{(2\sin\alpha-1)^2}. \tag{14}$$

记(14)的右边为 $g_{(\alpha)}$,则

$$\frac{1}{4}(2\sin\alpha-1)^3 g'_{(\alpha)}$$

$$=-\cos(2\alpha+30°)(2\sin\alpha-1)-2\cos\alpha(1-\sin(2\alpha+30°))$$

$$=2(\cos\alpha\sin(2\alpha+30°)-\sin\alpha\cos(2\alpha+30°)-\cos\alpha)$$

$$-\sin(2\alpha-60°)$$

$$=2(\cos(60°-\alpha)-\cos\alpha)-\sin2(\alpha-30°)$$

$$=2\sin(\alpha-30°)-2\sin(\alpha-30°)\cos(\alpha-30°)$$

$$>0.$$

因此 $g_{(\alpha)}$ 单调增，取 λ 满足(7)，则由于

$$\lim_{\phi\to60°}\frac{2-2\sin(\phi+30°)}{\left(2\sin\frac{\phi}{2}-1\right)^2}=\frac{4}{3},$$

所以 $\lambda\geqslant\frac{4}{3}$，并且(14)成立. 从而(13)成立，即(6)成立. 定理证毕.

在(7)中分别取 $\phi=180°$、$90°$、$120°$即得推论1、2、3.

注：(4)中的$\frac{16}{9}$，刘健先生原文为$\frac{9}{16}$，这当然是打印的错误(因为(2)表明 $\lambda>1$). 陈计先生指出$\frac{9}{16}$应当是 $1+\frac{9}{16}$即$\frac{25}{16}$，这正好是

$$(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=1.5617\cdots$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}$$

的渐近分数. 因此刘先生的猜测((2)中$\frac{16}{9}$改为$\frac{25}{16}$)是相当合理的.

如果 $\phi\leqslant120°$，那么$\triangle ABC$ 中有 Fermat 点 F. 令 FA、FB、FC 分别为 x、y、z，易知

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2,$$

于是有

$$Q \leqslant (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \leqslant \lambda Q. \tag{15}$$

其中 λ 由(7)给出.

更一般地,F 为$\triangle ABC$ 内一点(不一定是 Fermat 点),相应的表达式$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 与 Q 有何种关系似不易定出.

三角形中的线性不等式

陈　计　陈聪杰

浙江宁波大学数学系(315211)

§1　引言

本文中,我们对涉及△ABC常见线段的22个一次规范函数(见§3)间的大小关系作一系统整理,发现近200个不等式中有35个是基本的.很遗憾,我们仅确定了其中的30个是成立的(见§6);留下的5个猜想不等式,我们对周长小于800的整边三角形用计算机作了验证.

§2　记号

本节中,我们介绍本文所用到的记号:

a,b,c	边BC,CA,AB
s	半周长
R	外接圆半径
r	内切圆半径
r_a,r_b,r_c	旁切圆半径
$r_1(P),r_2(P),r_3(P)$	点P到△ABC边的距离
O	外心

H	垂心
G	重心
I	内心
Γ	Georgonne 点 （过$\triangle ABC$ 内切圆切点的 Ceva 线共 Γ 点）
N	Negel 点 （过$\triangle ABC$ 旁切圆切点的 Ceva 线共 N 点）
K	Lhuilier－Lemoine 点 （K 是$\sum r_1^2(P)$的极小值点，参见[1]）
J	Ji Chen 点 （J 是$\sum r_2(P)r_3(P)$的极大值点，见[2]）
h_a,h_b,h_c	高
m_a,m_b,m_c	中线
w_a,w_b,w_c	角平分线
g_a,g_b,g_c	Gergonne Ceva 线
n_a,n_b,n_c	Nagel Ceva 线
k_a,k_b,k_c	过 K 点的 Ceva 线
c_a,c_b,c_c	过 J 点的 Ceva 线
Δ_a	锐角$\triangle ABC$
GI	O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, Geometric Inequalities, Groningen, 1969
AGI	D. S. Mitrinovic, J. E. Pečarić, V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Dordrecht — Boston — London, 1989
MO	A. W. Marshall, I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications, New York

-- London — Toronto — Sydney — San Francisco, 1979

HLP G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge, 1934,1952

MPF D. S. Mitrinorić, J. E. Pečarić, A. M. Fink, Classical and New Inequalities in Analysis, Dordrecht — Boston — London, 1993

§3 线性规范函数

下列22个正体字母a～v所表示的一次对称函数，在$a=b=c=1$时取值均为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，我们称之为规范的：

$\mathrm{a}=9r=3\sum r_1(I)$ $\mathrm{b}=\frac{9}{2}R=\frac{3}{2}\sum AO$

$\mathrm{c}=\sqrt{3}s=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum a$ $\mathrm{d}=\sum r_a=4R+r$

$\mathrm{e}=\sum h_a=3\sum r_1(G)$ $\mathrm{f}=\sum m_a=\frac{3}{2}\sum AG$

$\mathrm{g}=\sum w_a$ $\mathrm{h}=\sum g_a$

$\mathrm{i}=\sum n_a$ $\mathrm{j}=\sum k_a$

$\mathrm{k}=\sum c_a$ $\mathrm{l}=3(R+r)=3R\sum\cos A$

$\mathrm{m}=\frac{3}{2}\sum AI$ $\mathrm{n}=\frac{2}{3}\sum A\Gamma$

$\mathrm{O}=\frac{3}{2}\sum AN$ $\mathrm{p}=\frac{3}{2}\sum AK$

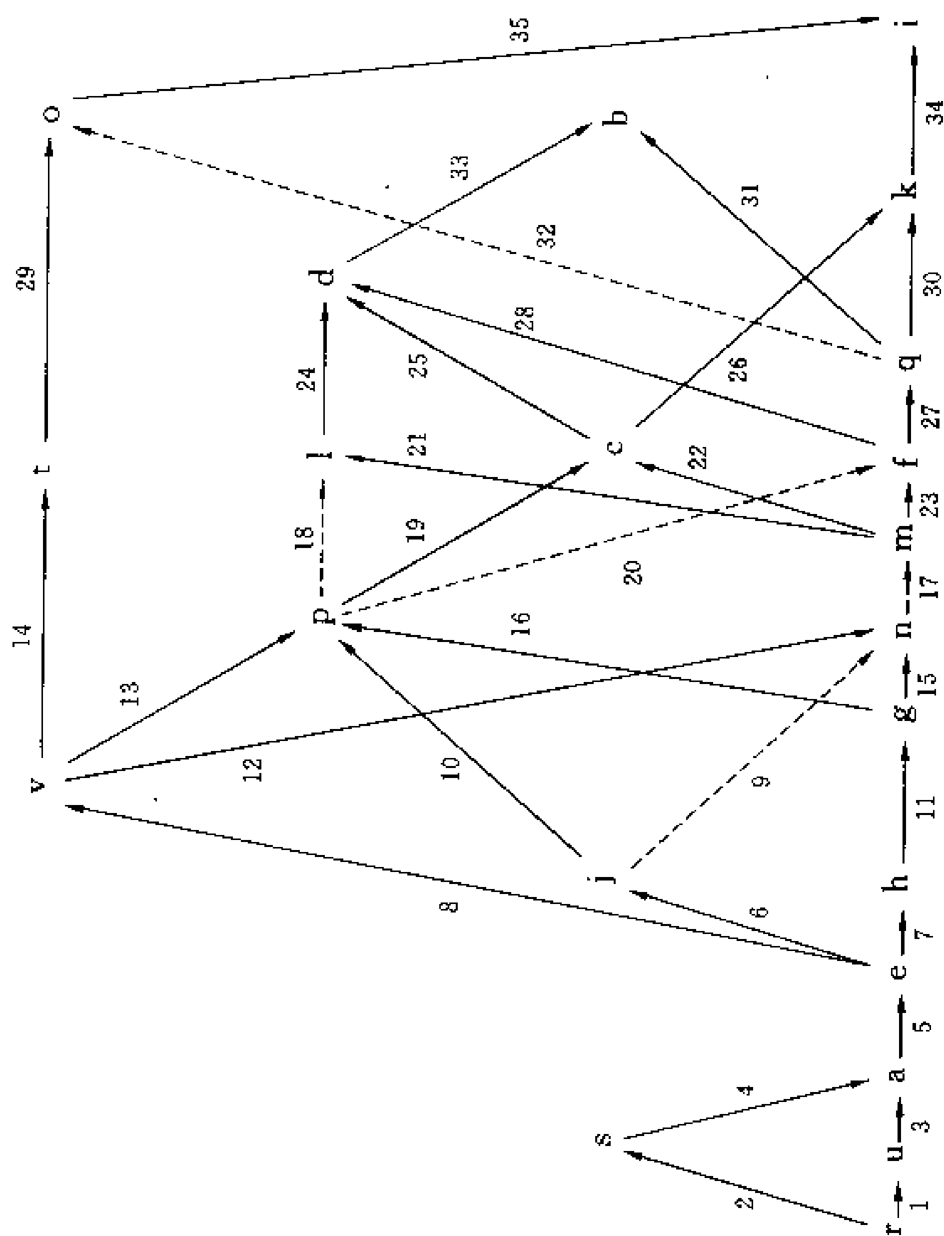
$\mathrm{q}=\frac{3}{2}\sum AJ$ $\mathrm{r}=\frac{3}{2R}(s^2+r^2-4R^2)=6R\sum\cos B\cos C$

$\mathrm{s}=3\sum r_1(\Gamma)$ $\mathrm{t}=3\sum r_1(N)$

$\mathrm{u}=3\sum r_1(K)$ $\mathrm{v}=3\sum r_1(J)$

其中

$$l=\frac{3}{2}\sum AH=3\sum r_1(O),(\Delta_a);\mathrm{r}=3\sum r_1(H),(\Delta_a).$$



§4　有向图

对上节的 22 个函数，我们用箭头及标号来表示它们之间的不等关系. 例如：用 $m \xrightarrow{23} f$ 表示不等式

$$\frac{3}{2}\sum AI \leqslant \frac{3}{2}\sum AG. \tag{23}$$

这样，对任意$\triangle ABC$，有上图所表示的不等式族. 其中 5 个虚线箭头表示猜想不等式.

§5　引理

引理 1　设两组正数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$，$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_n$ 满足不等式组

$$x_1 \geqslant y_1,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant y_1 + y_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_1 + \cdots + x_n \geqslant y_1 + \cdots + y_n,$$

则当 $p<1$ 时，有不等式

$$M_p(x) \geqslant M_p(y),$$

其中 M_p 是 p 次幂平均.

证明　由于 M_p 在 $p \neq 0$ 处连续，所以我们只须证 $p \neq 0$ 的情形. 由假设可得

$$(x_1^{p-1} - x_2^{p-1})x_1 \geqslant (x_1^{p-1} - x_2^{p-1})y_1,$$
$$(x_2^{p-1} - x_3^{p-1})(x_1 + x_2) \geqslant (x_2^{p-1} - x_3^{p-1})(y_1 + y_2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(x_{n-1}^{p-1} - x_n^{p-1})(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \geqslant (x_{n-1}^{p-1} - x_n^{p-1})(y_1 + \cdots + y_{n-1}),$$

$$x_n^{p-1}(x_1+\cdots+x_n)\geqslant x_n^{p-1}(y_1+\cdots+y_n).$$

将以上 n 个不等式两边分别相加，并对右边用 **HLP** 的(2.8.4)式(Hölder 不等式的增补)，得

$$x_1^p+\cdots+x_n^p\geqslant x_1^{p-1}y_1+\cdots+x_n^{p-1}y_n$$
$$\geqslant(x_1^p+\cdots+x_n^p)^{(p-1)/p}(y_1^p+\cdots+y_n^p)^{1/p},$$

即

$$(x_1^p+\cdots+x_n^p)^{1/p}\geqslant(y_1^p+\cdots+y_n^p)^{1/p}.$$

引理 2 设两组数 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n>0$，$y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n>0$ 满足不等式组：

$$x_1\leqslant y_1,$$
$$x_1x_2\leqslant y_1y_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1\cdots x_n\leqslant y_1\cdots y_n,$$

则有不等式

$$x_1+\cdots+x_n\leqslant y_1+\cdots+y_n.$$

证明 由假设可得

$$x_1^{x_1-x_2}\leqslant y_1^{x_1-x_2},$$
$$(x_1x_2)^{x_2-x_3}\leqslant(y_1y_2)^{x_2-x_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_1\cdots x_{n-1})^{x_{n-1}-x_n}\leqslant(y_1\cdots y_{n-1})^{x_{n-1}-x_n},$$
$$(x_1\cdots x_n)^{x_n}\leqslant(y_1\cdots y_n)^{x_n}.$$

将以上 n 个不等式两边分别相乘，得

$$x_1^{x_1}\cdots x_n^{x_n}\leqslant y_1^{x_1}\cdots y_n^{x_n};$$

再用加权的算术平均－几何平均不等式，得

$$(y_1+\cdots+y_n)/(x_1+\cdots+x_n)$$
$$=\left(x_1\cdot\frac{y_1}{x_1}+\cdots+x_n\cdot\frac{y_n}{x_n}\right)/(x_1+\cdots+x_n)$$

$$\geqslant\left[\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{x_1}\cdots\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^{x_n}\right]^{1/(x_1+\cdots+x_n)}\geqslant 1.$$

§6 不等式

定理 1 r→u：$\frac{3}{2R}(s^2+r^2-4R^2)\leqslant 3\sum r_1(K)$. (1)

证明 由 $r_1(K)=\frac{a^2}{\sum a^2}h_a=\frac{2a\Delta}{\sum a^2}$，得

$$\sum r_1(K)=\frac{2s^2r}{s^2-r^2-4Rr}. \tag{1.1}$$

于是(1)式等价于

$$\begin{aligned}H(s^2)&\equiv(s^2+r^2-4R^2)(s^2-r^2-4Rr)-8s^2Rr\\&=s^4-4s^2R(R+2r)+r(4R+r)(4R^2-r^2)\\&\leqslant 0.\end{aligned} \tag{1.2}$$

由三角形基本不等式(见 **GI** 13.8)：

$$I(s^2)\equiv s^4-2s^2(2R^2+10Rr-r^2)+r(4R+r)^3\leqslant 0, \tag{1.3}$$

$$H(s^2)=I(s^2)+2rJ(s^2)\leqslant 2rJ(s^2).$$

从而，要证 $H(s^2)\leqslant 0$，只须证

$$J(s^2)\equiv s^2(6R-r)-(4R+r)(6R^2+4Rr+r^2)\leqslant 0. \tag{1.4}$$

由 Gerretsen 不等式 $s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$，得

$$\begin{aligned}J(s^2)&\leqslant J(4R^2+4Rr+3r^2)\\&=-2R^2r+6Rr^2-4r^3\\&=-2r(R-2r)(R-r)\leqslant 0.\end{aligned} \tag{1.5}$$

定理 2 r→s：$\frac{3}{2R}(s^2+r^2-4R^2)\leqslant 3\sum r_1(\Gamma)$. (2)

证明 由 $r_1(\Gamma)=\frac{(s-b)(s-c)}{\sum(s-b)(s-c)}h_a=\frac{z\Delta yz}{a\sum yz}$，得

$$\sum r_1(\Gamma)=\frac{2\Delta\sum yz(z+x)(x+y)}{abc\sum yz}$$

$$=\frac{xyz\sum x+\left(\sum yz\right)^2}{2R\sum yz}=\frac{s^2r^2+r^2(4R+r)^2}{2Rr(4R+r)}$$

$$=\frac{s^2r+r(4R+r)^2}{2R(4R+r)}. \tag{2.1}$$

于是,(2)式等价于

$$(4R+r)(s^2+r^2-4R^2)\leqslant s^2r+r(4R+r)^2$$

即

$$4Rs^2\leqslant 4R(R+r)(4R+r),$$

或

$$s^2\leqslant 4R^2+5Rr+r^2. \tag{2.2}$$

这弱于 Gerretsen 不等式 $s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$.

定理 3 u→a:$3\sum r_1(K)\leqslant 9r$. (3)

证明 我们来证更强的结论:

$$\sum r_1^2(K)\leqslant 3r^2. \tag{3.1}$$

由 $r_1(K)=\frac{2a\Delta}{\sum a^2}$,上式等价于

$$\frac{4\Delta^2}{\sum a^2}\leqslant 3r^2,$$

即

$$\left(\sum a\right)^2\leqslant 3\sum a^2, \tag{3.2}$$

这是显然的.

问题:求出使 $\sum r_1^k(K)\leqslant 3r^k$ 成立的最大实数 k.

定理 4 s→a:$3\sum r_1(\Gamma)\leqslant 9r$. (4)

证明 由 $r_1(\Gamma)=\frac{2\Delta}{a(s-a)}\Big/\sum\frac{1}{s-a}$,(4)式等价于

$$\sum a\sum\frac{1}{a(s-a)}\leqslant 3\sum\frac{1}{s-a}. \qquad (4.1)$$

由于$b(s-b)-c(s-c)=-(b-c)(s-a)$,所以$(a,b,c)$与$(a(s-a),b(s-b),c(s-c))$反序. 由切比晓夫不等式知(4.1)式成立.

猜测:当 $k=\log_2 3$ 时,有

$$\sum[r_1'(\Gamma)]^k\leqslant 3r^k, \qquad (4.2)$$

其中 $r_1'(\Gamma)$是 Ceva 线 g_a 的 ΓD 部分.

定理 5 a→c:$9r\leqslant\sum h_a$. (5)

注记:这个结果属于 S. I. Zetel,见 **GI**6. 8.

定理 6 e→j:$\sum h_a\leqslant\sum k_a$. (6)

注记:$h_a\leqslant k_a$ 显然.

定理 7 e→h:$\sum h_a\leqslant\sum g_a$. (7)

注记:$h_a\leqslant g_a$ 显然.

定理 8 e→v:$\sum h_a\leqslant 3\sum r_1(J)$. (8)

证明 我们来证更一般的结论:

$$\sum h_a^k\leqslant 3^k\sum r_1^k(J), \qquad (8.1)$$

其中 $k\geqslant 1$ 或 $k<0$.

由 $r_1(J)=\frac{a(s-a)}{\sum a(s-a)}h_a$,知(8.1)式等价于

$$\left[\sum a(s-a)\right]^k\sum h_a^k\leqslant 3^k\sum[a(s-a)h_a]^k. \qquad (8.2)$$

由于$(a(s-a),b(s-b),c(s-c))$与(h_a,h_b,h_c)同序,所以用切比晓夫不等式得

$$\sum[a(s-a)h_a]^k\geqslant\frac{1}{3}\sum[a(s-a)]^k\sum h_a^k,$$

再由幂平均的单调性,

$$\frac{1}{3}\sum[a(s-a)]^k\geqslant\left[\frac{1}{3}\sum a(s-a)\right]^k,$$

知不等式(8.2)成立.

猜测：当 $k\geqslant k_0\doteq 0.672814102$ 时，不等式(8.1)成立；其中 k_0 是 $\frac{1}{2}+2^k=3^k$ 的一个根.

猜想 9 j→n：$\sum k_a\leqslant\frac{3}{2}\sum A\Gamma$. (9)

猜测：对$\triangle ABC$ 内任意一点 P，有

$$\sum AP^k\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^k\sum k_a{}^k, \tag{9.1}$$

其中 $1\leqslant k\leqslant 3$.

定理 10 j→p：$\sum k_a\leqslant\frac{3}{2}\sum AK$. (10)

证明 我们来证更一般的结论：

$$\sum k_a{}^k\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^k\sum AK^k, \tag{10.1}$$

其中 $k\geqslant 1$ 或 $k<0$.

由 $AJ=\frac{b^2+c^2}{\sum a^2}k_a$，上式等价于

$$\left(2\sum a^2\right)^k\sum k_a{}^k\leqslant 3^k\sum(b^2+c^2)^k k_a{}^k. \tag{10.2}$$

由 $k_a{}^2=\frac{b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)}{(b^2+c^2)^2}=\frac{b^2c^2}{b^2+c^2}\left(2-\frac{a^2}{b^2+c^2}\right)$，

知$(b^2+c^2,c^2+a^2,a^2+b^2)$与$(k_a,k_b,k_c)$同序.用切比晓夫不等式，

$$\sum(b^2+c^2)^k k_a{}^k\geqslant\frac{1}{3}\sum(b^2+c^2)^k\cdot\sum k_a{}^k;$$

再用幂平均的单调性，

$$\frac{1}{3}\sum(b^2+c^2)^k\geqslant\left[\frac{1}{3}\sum(b^2+c^2)\right]^k=\left(\frac{2}{3}\sum a^2\right)^k,$$

即知不等式(10.2)成立.

问题：求使不等式(10.1)成立的 k 的范围.

定理 11 h→g：$\sum g_a \leqslant \sum w_a$. (11)

注记：这个结果属于 R. H. Eddy[3]，参见 **AGI**, XI. 6.19 中第二个不等式.

定理 12 v→n：$3\sum r_1(J) \leqslant \frac{3}{2}\sum A\Gamma$. (12)

证明 由于 $r_1(J)=\frac{a(s-a)}{\sum a(s-a)}h_a$,

$$A\Gamma=\frac{(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b)}{\sum (s-b)(s-c)}g_a=\frac{2a(s-a)}{\sum a(s-a)}g_a,$$

又 $g_a \geqslant h_a$，所以 $A\Gamma \geqslant 2r_1(J)$，从而不等式(12)成立.

定理 13 v→p：$3\sum r_1(J) \leqslant \frac{3}{2}\sum AK$. (13)

证明 我们来建立更一般的结论：

$$\sum AP \geqslant 2\sum r_1(J), \tag{13.1}$$

其中 P 为 $\triangle ABC$ 内任意一点.

由 $r_1(J)=\frac{a(s-a)}{\sum a(s-a)}h_a=\frac{2\Delta(s-a)}{\sum a(s-a)}$，得

$$\sum r_1(J)=\frac{\Delta\sum a}{\sum a(s-a)}; \tag{13.2}$$

又 $\sum a(s-a)=2r(4R+r)$，得

$$\sum r_1(J)=\frac{s^2}{4R+r}. \tag{13.3}$$

不妨设 $A=\max\{A,B,C\}$，则由 **GI** 12.55：

$$\sum AP \geqslant \begin{cases} \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta\right)^{1/2}, & \text{当 } A \leqslant \frac{2\pi}{3}; \\ b+c, & \text{当 } A > \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

当 $A\leqslant\frac{2\pi}{3}$时，(13.1)式等价于

$$\left(\frac{2s^2}{4R+r}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2\sqrt{3}\Delta. \tag{13.4}$$

由于 $\sum a^2=2(s^2-r^2-4Rr)$，$\Delta=sr$，所以(13.4)等价于

$$H(s)\equiv 4s^4-s^2(4R+r)^2+r(4R+r)^3-2\sqrt{3}sr(4R+r)^2\leqslant 0 \tag{13.5}$$

由三角形基本不等式：

$$I(s)\equiv s^4-2s^2(2R^2+10Rr-r^2)+r(4R+r)^3\leqslant 0, \tag{13.6}$$

得

$$H(s)=4I(s)+rJ(s)\leqslant rJ(s), \tag{13.7}$$

其中

$$J(s)\equiv 9s^2(8R-r)-2\sqrt{3}s(4R+r)^2-3(4R+r)^3.$$

由 **GI** 5.11 及 **GI** 5.4：

$$3\sqrt{3}r\leqslant s\leqslant 3\sqrt{3}r+2(R-2r)$$
$$\leqslant 3\sqrt{3}r+\frac{7}{2\sqrt{3}}(R-2r)=\frac{7R+4r}{2\sqrt{3}}, \tag{13.8}$$

以及

$$J(3\sqrt{3}r)=-3(64R^3+144R^2r-588Rr^2+88r^2)$$
$$=-12(R-2r)(16R^2+68Rr-11r^2)\leqslant 0, \tag{13.9}$$

$$J\left(\frac{7R+4r}{2\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{4}(40R^3-141R^2r+84Rr^2+76r^3)$$
$$=-\frac{1}{4}(R-2r)^2(40R+19r)\leqslant 0, \tag{13.10}$$

得 $J(s)\leqslant 0$，从而 $H(s)\leqslant 0$.

当 $A>\frac{2\pi}{3}$时，要证(13.1)，我们只须证

$$\frac{2\Delta\sum a}{\sum a(s-a)}<b+c. \tag{13.11}$$

去分母，两边平方后相减：

$$(b+c)^2\left[\sum a(s-a)\right]^2-4\Delta^2\left(\sum a\right)^2$$
$$-\frac{1}{4}(2x+y+z)^2\left(\sum yz\right)^2-xyz\left(\sum x\right)^3$$
$$=x^4(y^2+z^2+yz)+x^3(y+z)(y^2+z^2+yz)+\frac{1}{4}x^2(y^2+z^2)^2$$
$$-\frac{1}{2}xyz(y+z)(y^2+z^2)+\frac{1}{4}y^2z^2(y+z)^2$$
$$=x^3(x+y+z)(y^2+z^2+yz)$$
$$+\frac{1}{4}(xy^2+xz^2-y^2z-yz^2)>0, \qquad (13.12)$$

其中 $x=s-a$ 等；于是不等式(13.11)成立.

定理 14 v→t：$3\sum r_1(J)\leqslant 3\sum r_1(N)$. (14)

证明 我们来建立更一般的结论：

$$\sum r_1^k(J)\leqslant\sum r_1^k(N), \qquad (14.1)$$

其中 $k\geqslant 1$ 或 $k<0$.

由 $r_1(J)=\dfrac{a(s-a)}{\sum a(s-a)}h_a=\dfrac{2\Delta(s-a)}{\sum a(s-a)}$，

$$r_1(N)=\frac{s-a}{\sum(s-a)}h_a=\frac{2\Delta(s-a)}{sa},$$

(14.1)式等价于

$$\frac{\sum(s-a)^k}{\left[\sum a(s-a)\right]^k}\leqslant\frac{1}{s^k}\sum\left(\frac{s-a}{a}\right)^k,$$

即

$$\left[\frac{s}{\sum a(s-a)}\right]^k\leqslant\sum\left(\frac{s-a}{a}\right)^k\Big/\sum(s-a)^k. \qquad (14.2)$$

由于$(s-a,s-b,s-c)$与$\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}\right)$同序，所以由泉-小林-高桥[4]

定理知：$M_k\left(\frac{s-a}{a}\right)\Big/M_k(s-a)$关于 k 单调增.

当 $k\geqslant1$ 时，要证不等式(14.2)，我们只须证：

$$\frac{s}{\sum a(s-a)}\leqslant\sum\frac{s-a}{a}\Big/\sum(s-a),$$

即

$$s^2\leqslant\sum a(s-a)\cdot\sum\frac{s-a}{a},\qquad(14.3)$$

这用 Cauchy 不等式即得.

当 $k<0$ 时，要证(14.2)式，我们只须证：

$$\frac{s}{\sum a(s-a)}\geqslant\left[\Pi\frac{s-a}{a}\Big/\Pi(s-a)\right]^{1/3},$$

即

$$s^3\Pi a\geqslant\left[\sum a(s-a)\right]^3.\qquad(14.4)$$

令 $s-a=x$ 等，则

$$\begin{aligned}&s^3\Pi a-\left[\sum a(s-a)\right]^3\\&=\Pi(y+z)\cdot\left(\sum x\right)^3-8\left(\sum yz\right)^3\\&=\sum(x^5y+x^5z)+4\sum(x^4y^2+x^4z^2)+8\sum x^4yz\\&\quad-2\sum y^3z^3-5\sum(x^3y^2z+x^3yz^2)-18x^2y^2z^2\\&=\sum(y-z)^2[x^4+3x^2(y+z)^2+5xyz(y+z)\\&\quad+yz(y+z)^2]\\&\geqslant0.\end{aligned}\qquad(14.5)$$

问题：求使不等式(14.1)成立的 k 的范围.

定理 15 g→n：$\sum w_a\leqslant\frac{3}{2}\sum A\Gamma.$ (15)

注记：陈计在 1991 年发表了更广的猜想(见[5]的 23.16°)：对

$\triangle ABC$ 内任意一点 P，有不等式

$$\sum AP \geqslant \frac{2}{3}\sum w_a; \tag{15.1}$$

王振在 1993 年 5 月 16 日来信中称：已用 s-R-r 方法证明了更强的不等式：

$$\left(\sum AP\right)^2 \geqslant \frac{4}{9}\sum\frac{1}{a}\cdot\sum a w_a^2. \tag{15.2}$$

考虑很复杂，这里就不给出证明细节.

定理 16 g→p：$\sum w_a \leqslant \frac{3}{2}\sum AK.$ (16)

证明 在不等式(15.1)中，取 $P=K$ 即得.

猜测：对 $\triangle ABC$ 内任意一点 P，有

$$\sum AP^k \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^k \sum w_a^k, \tag{16.1}$$

其中 $1\leqslant k\leqslant 3$.

猜想 17 n→m：$\frac{3}{2}\sum A\Gamma \leqslant \frac{3}{2}\sum AI.$ (17)

猜测：$M_k(A\Gamma)\leqslant M_k(AI)$，其中 $k\leqslant 1$.

猜想 18 p→l：$\frac{3}{2}\sum AK \leqslant 3(R+r).$ (18)

定理 19 p→c：

$$\frac{3}{2}\sum AK \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\sum a. \tag{19}$$

证明 由 $AK=\frac{2bcm_a}{\sum a^2}$，(19)式等价于

$$2\sqrt{3}\sum bcm_a \leqslant \sum a^2\cdot\sum a; \tag{19.1}$$

两边平方，得

$$12\sum b^2c^2m_a^2+24abc\sum am_bm_c \leqslant \left(\sum a^2\right)^2\left(\sum a\right)^2. \tag{19.2}$$

注意到陈计[5]1993年发表的不等式：

$$4m_bm_c\leqslant 2a^2+bc \tag{19.3}$$

(19.2)右边－(19.2)左边

$$\begin{aligned}
&\geqslant\left(\sum a^2\right)^2\left(\sum a\right)^2-3\sum b^2c^2(2b^2+2c^2-a^2)\\
&\quad-6abc\sum a(2a^2+bc)\\
&=\sum a^6+2\sum(a^5b+a^5c)-3\sum(a^4b+a^4c^2)+4\sum b^4c^4\\
&\quad-10\sum a^4bc+4\sum(a^3b^2c+a^3bc^2)-3a^2b^2c^2\\
&=\frac{1}{2}\sum(b-c)^2[3a^4+a^2bc-7abc(b+c)\\
&\quad+b^4+6b^3c+2b^2c^2+6bc^3+c^4]\\
&=\frac{1}{32}\sum(b-c)^2\{(2a-b-c)^2[12a^2+12a(b+c)\\
&\quad+9b^2+22bc+9c^2]+24a(b+c)(b-c)^2\\
&\quad+7b^4+56b^3c-30b^2c^2+56bc^3+7c^4\}\\
&\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{19.4}$$

猜测：当 $k\leqslant\log_3 4$ 时，有

$$\sqrt{3}M_k(AK)\leqslant M_k(a), \tag{19.5}$$

当 $k\geqslant 4$ 时，不等号反向.

猜想 20 p→f：$\frac{3}{2}\sum AK\leqslant\frac{3}{2}\sum AG.$ (20)

定理 21 m→I：$\frac{3}{2}\sum AI\leqslant 3(R+r).$ (21)

注记：这个结果属于 G. Daniellson，见 **GI**12. 2.

定理 22 $m\to c$：$\frac{3}{2}\sum \mathrm{AI}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum \mathrm{a}.$ (22)

注记：这个结果属于 *A. Bager*[7]；后来，*A. W. Walker*[8]把它加强成

$$\left(\sum \mathrm{AI}\right)^2\leqslant\sum \mathrm{bc}, \tag{22.1}$$

见 **AGI**, Ⅸ.6.1.

定理 23 m→f: $\frac{3}{2}\sum AI \leqslant \frac{3}{2}\sum AG$. (23)

证明 我们来证更一般的结论:

$$M_k(AI) \leqslant M_k(AG), \tag{23.1}$$

其中 $k \leqslant 1$.

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$, 则 $AI \leqslant BI \leqslant CI$, $AG \leqslant BG \leqslant CG$. 由引理 1, 我们只需证: $AG \geqslant AI$, $AG+BG \geqslant AI+BI$ 及(23)式.

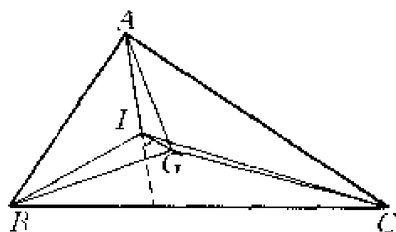
如图, 设 $\angle AIG$ 的补角为 θ, 则

$0 \leqslant \theta \leqslant (A+C)/2$,

$AG \geqslant AI - GI \cdot \cos\angle AIG$,

$BG \geqslant BI - GI \cdot \cos\angle BIG$,

$CG \geqslant CI - GI \cdot \cos\angle CIG$.



所以

$$AG - AI \geqslant GI \cdot \cos\theta \geqslant 0,$$

$$AG + BG - AI - BI$$

$$\geqslant GI \cdot \left[\cos\theta - \cos\left(\frac{A+B}{2} + \theta\right)\right] \geqslant 0,$$

$$AG + BG + CG - AI - BI - CI$$

$$\geqslant GI \cdot \left[\cos\theta - \cos\left(\frac{A+B}{2} + \theta\right) - \cos\left(\frac{A+C}{2} - \theta\right)\right]$$

$$= GI \cdot \left[\cos\theta - 2\cos\frac{2A+B+C}{4}\cos\left(\frac{B-C}{2} + \theta\right)\right]$$

$$\geqslant GI \cdot \left[\cos\theta - \cos\left(\frac{B-C}{2} + \theta\right)\right] \geqslant 0.$$

注记: 上述证法是王振 1994 年 5 月 4 日来信中给出的.

猜测: 当 $k \leqslant k_0 \doteq 1.394954602$ 时, 不等式(23.1)成立; 其中 k_0 是 $2^x + 2 = 3^x$ 的一个根.

定理 24 l→d: $3(R+r) \leqslant 4R + r$. (24)

注记: 由 Chapple-Euler 不等式 $R \geqslant 2r$, 上式显然.

定理 25 c→d: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sum a \leqslant \sum r_a$. (25)

注记:这个结果属于 J. C. H. Gerretsen,见 **GI** 5.29. 它可推广为:当 $k \geqslant 1$ 时,有

$$\frac{\sqrt{3}}{2}M_k(a) \leqslant M_k(r_a), \tag{25.1}$$

见 **MO**, Ch. 8, Sect. D. 1. b,或 **AGI**, Ⅶ. 2. 3. 2.

定理 26 c→k: $\frac{\sqrt{3}}{2}\sum a \leqslant \sum c_a$. (26)

注记:这个结论属于王振[9].

猜测:当 $1 \leqslant k \leqslant 4$ 时,有

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \sum a^k \leqslant \sum c_a{}^k. \tag{26.1}$$

定理 27 f→q: $\frac{3}{2}\sum AG \leqslant \frac{3}{2}\sum AJ$. (27)

证明 我们来建立更一般的结论:

$$M_k(AG) \leqslant M_k(AJ), \tag{27.1}$$

其中 $k \leqslant 2$.

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则 $AG \leqslant BG \leqslant CG$, $AJ \leqslant BJ \leqslant CJ$. 由引理 1,我们仅需证

$$\sum AJ^2 \geqslant \sum AG^2, \tag{27.2}$$

$$AJ^2 + BJ^2 \geqslant AG^2 + BG^2, \tag{27.3}$$

$$AJ^2 \geqslant AG^2. \tag{27.4}$$

据 **GI** 12.53,对 $\triangle ABC$ 内任意一点 P,均有

$$\sum AP^2 \geqslant \sum AG^2, \tag{27.5}$$

所以,不等式(27.2)成立.

由(27.2)式,要证不等式(27.3),我们只需证

$$CJ^2 \leqslant CG^2, \tag{27.6}$$

即
$$\frac{a^2b^2c^2-4ab(s-a)^2(s-b)^2}{\left[\sum a(s-a)\right]^2}\leqslant\frac{2a^2+2b^2-c^2}{9}. \qquad (27.7)$$
令 $a=y+z$ 等，则 $x\leqslant y\leqslant z$. 现在计算
$$\begin{aligned}
&\left[\sum a(s-a)\right]^2(2a^2+2b^2-c^2)-9a^2b^2c^2+36ab(s-a)^2(s-b)^2\\
&=4\left(\sum yz\right)^2[4x(x+y+z)+(x-y)^2]\\
&\quad-9\Pi(y+z)^2+36x^2y^2(y+z)(z+x)\\
&=7z^4(x+y)^2-2z^3(x^3-13x^2y-13xy^2+y^3)\\
&\quad-z^2(5x^4+22x^3y-18x^2y^2+22xy^3+5y^4)\\
&\quad-10xyz(x+y)(x^2+y^2)-5x^2y^2(x-y)^2\\
&=2z^3(x+y)(zx+zy-x^2-y^2)\\
&\quad+5z^2(x+y)(z^2x+z^2y-x^3-y^3)\\
&\quad+28z^2xy(zx+zy-x^2-y^2)\\
&\quad+xyz(11x^2+18xy+11y^2)(z-y)\\
&\quad+xy(y^2z+9xyz+10x^2z+5x^2y-5xy^2)(y-x)\\
&\geqslant 0 \qquad (27.8)
\end{aligned}$$
所以不等式(27.5)成立，从而(27.3)式得证.

不等式(27.4)等价于
$$\frac{a^2b^2c^2-4bc(s-b)^2(s-c)^2}{\left[\sum a(s-a)\right]^2}\geqslant\frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}. \qquad (27.9)$$
由于
$$\begin{aligned}
&9a^2b^2c^2-36bc(s-b)^2(s-c)^2-\left[\sum a(s-a)\right]^2(2b^2+2c^2-a^2)\\
&=9\Pi(y+z)^2-36y^2z^2(z+x)(x+y)\\
&\quad-4\left(\sum yz\right)^2[4x(x+y+z)+(y-z)^2]\\
&=-7x^4(y+z)^2+2x^2(y^3-13y^2z-13yz^2+z^3)
\end{aligned}$$

$$+x^2(5y^4+22y^3z-18y^2z^2+22yz^3+5z^4)$$
$$+10xyz(y+z)(y^2+z^2)+5y^2z^2(y-z)^2$$
$$=x(yz-x^2)[7x(y+z)^2+20yz(y+z)]$$
$$+2x^2yz(y+z-2x)(y+z)$$
$$+(y-z)^2[2x^3(y+z)+x^2(5y^2+23yz+5z^2)$$
$$+10xyz(y+z)+5y^2z^2]$$
$$\geqslant 0. \tag{27.10}$$

所以(27.9)式成立，从而不等式(27.4)得证.

注记：不等式(27)是司徒凌波[10]1994 年的猜想.

定理 28 f→d：$\sum m_a \leqslant \sum r_a$ (28)

注记：这个结果属于 F. Leuenberger，见 **GI** 8.2. 事实上，有更广的结论：

$$\sum m_a^k \leqslant \sum r_a^k, \tag{28.1}$$

其中 $k\geqslant 1$ 或 $k\leqslant 0$. 前者见 **MO**，Ch. 8，Sect. D. 2. a，或 **AGI**，Ⅷ. 2. 3. 3；后者见[11].

定理 29 t→o：$3\sum r_1(N) \leqslant \frac{3}{2}\sum AN.$ (29)

证明 我们来建立更一般的结论：

$$2M_k[r_1(N)] \leqslant M_k(AN), \tag{29.1}$$

其中 $k\leqslant 1$.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $r_1(N)\leqslant r_2(N)\leqslant r_3(N)$；$AN\leqslant BN$，$CN\leqslant BN$. 由引理 1，我们只需证

$$2r_1(N)\leqslant AN, \tag{29.2}$$

$$2r_1(N)\leqslant CN, \tag{29.3}$$

$$2r_1(N)+2r_2(N)\leqslant AN+CN, \tag{29.4}$$

及

$$2\sum r_1(N)\leqslant \sum AN. \tag{29.5}$$

由于 $r_1(N)=\frac{s-a}{\sum(s-a)}h_a=\frac{2r(s-a)}{a}\leqslant r$，又因 $AN=\sqrt{4r^2+(b-c)^2}\geqslant 2r$，不等式(29.2)及(29.3)均成立.

由于

$$\begin{aligned} r_1(N)+r_2(N) &= 2r\left(\frac{s-a}{a}+\frac{s-b}{b}\right) \\ &= \frac{r}{ab}[c(a+b)+(a-b)^2]\leqslant\frac{r}{ab}[b(a+b)+(a-b)^2] \\ &= \frac{r}{ab}[2ab-(a-b)(2b-a)]\leqslant 2r, \end{aligned} \tag{29.6}$$

所以不等式(29.4)也成立.

由 Erdös-Mordell 不等式：对$\triangle ABC$内任意一点，有

$$\sum AP\geqslant 2\sum r_1(P), \tag{29.7}$$

知不等式(29.5)成立.

定理 30 q→k：$\frac{3}{2}\sum AJ\leqslant\sum c_a$. (30)

证明 我们来建立更一般的结论：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k\sum AJ^k\leqslant\sum c_a{}^k, \tag{30.1}$$

其中 $k>0$ 或 $k\leqslant -1$.

由于(a,b,c)与$(a(s-b),b(s-c),c(s-c))$反序，又

$$AJ^2=\frac{a^2b^2c^2-4bc(s-b)^2(s-c)^2}{\left[\sum a(s-a)\right]^2}, \tag{30.2}$$

所以(AJ,BJ,CJ)与$(b(s-b)+c(s-c),c(s-c)+a(s-a),a(s-a)+b(s-b))$反序. 用切比晓夫不等式及幂平均的单调性，得

$$\begin{aligned} \sum c_a{}^k &= \sum\frac{AJ^k}{[b(s-b)+c(s-c)]^k}\left[\sum a(s-a)\right]^k \\ &\geqslant\frac{1}{3}\sum[b(s-b)+c(s-c)]^{-k}\cdot\sum AJ^k\cdot\left[\sum a(s-a)\right]^k \end{aligned}$$

$$\geqslant\left\{\frac{1}{3}\sum[b(s-b)+c(s-c)]\right\}^{-k}\cdot\sum AJ^k\cdot\left[\sum a(s-a)\right]^k$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^k\sum AJ^k. \tag{30.3}$$

定理 31 q→b: $\frac{3}{2}\sum AJ\leqslant\frac{9}{2}R.$ (31)

证明 我们来证更强的结论:

$$\sum AJ^2\leqslant 3R^2, \tag{31.1}$$

由 Kooi 不等式(见 **GI** 5.6):

$$2s^2(2R-r)\leqslant R(4R+r)^2, \tag{31.2}$$

得

$$\sum AJ^2=s^2\frac{12R^2+8Rr-r^2}{(4R+r)^2}-r(4R+r)$$
$$\leqslant\frac{R(12R^2+8Rr-r^2)}{2(2R-r)}-r(4R+r). \tag{31.3}$$

由于

$$2(2R-r)(3R^2+4Rr+r^2)-R(12R^2+8Rr-r^2)$$
$$=2R^2r-3Rr^2-2r^3=r(R-2r)(2R+r)\geqslant 0, \tag{31.4}$$

所以(31.1)式成立.

注记:不等式(31)是司徒凌波[10]的猜想,上述证法是曹纲1994年6月2日来信中给出的.

问题:求出使不等式

$$\sum AJ^k\leqslant 3R^k \tag{31.5}$$

成立的最大 k.

猜测: $2\sum AJ\leqslant\left\{\begin{array}{c}\sum M_a\leqslant\sum C_a\\ \sum N_a\end{array}\right\}\leqslant 6R,$ (31.6)

其中 M_a, C_a, N_a 分别是过 AG, AJ, AN 的 $\triangle ABC$ 外接圆的弦.

猜想 32 q→o: $\frac{3}{2}\sum AJ\leqslant\frac{3}{2}\sum AN.$ (32)

定理 33　d→b：$\sum r_a \leqslant \frac{9}{2}R$.　(33)

注记：这个结果属于 L. Fejes Tóth，见 **GI** 5.40.

定理 34　k→i：$\sum C_a \leqslant \sum n_a$.　(34)

证明　我们只需证 $c_a \leqslant n_a$. 由

$$4n_a^2 = 4m_a^2 + (b-c)^2[1+2(b+c)/a],$$

$$\begin{aligned}4c_a^2 &= 4m_a^2 + (b-c)^2(s-a)[as(2b+2c-a) \\ &\quad -(b-c)^2(b+c)]/[b(s-b)+c(s-c)]^2, \\ &= 4m_a^2 + (b-c)^2(s-a)[3a^2(s-a)+4a(s-a)^2 \\ &\quad +4(b+c)(s-b)(s-c)]/[b(s-b)+c(s-c)]^2,\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&a[b(s-b)+c(s-c)]^2(n_a^2-c_a^2) \\ &= \frac{(b-c)^2}{16}[-a^5+2a^4(b+c)+2a^3(b+c)^2-4a^2(b-c)^2(b \\ &\quad +c)-a(b-c)^2(b^2+c^2+6bc)+2(b-c)^4(b+c)] \\ &= (y-z)^2yz[2x^2(y+z)+2x(y^2+z^2+4yz)+3yz(y+z)] \\ &\geqslant 0,\end{aligned} \tag{34.1}$$

其中 $x=s-a$ 等.

定理 35　o→i：$\frac{3}{2}\sum AN \leqslant \sum n_a$.　(35)

证明　我们来证更一般的结论：

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \sum AN^k \leqslant \sum n_a^k, \tag{35.1}$$

其中 $0<k\leqslant 1$.

由 $n_b^2-n_c^2=-2s(s-a)^2(b-c)/bc$，知 (a,b,c) 与 (n_a,n_b,n_c) 反序. 又由

$$AN = \frac{(s-b)+(s-c)}{\sum(s-a)}n_a = \frac{a}{s}n_a,$$

以及切比晓夫不等式，得

$$\sum AN^k \leqslant \frac{1}{3} \sum \left(\frac{a}{3} \right)^k \sum n_a{}^k; \tag{35.2}$$

再由幂平均的单调性，

$$\left(\frac{1}{3} \sum a^k \right)^{1/k} \leqslant \frac{1}{3} \sum a = \frac{2}{3} s, \tag{35.3}$$

即得不等式(35.1).

参考文献

[1]杨路，谈谈重心坐标，初等数学论丛(第3辑)，上海教育出版社，1981年5月第一版，16—43.

[2]陈计，关于Gerber不等式的加强，福建中学数学，1992年第5期，8—9.

[3]R. H. Eddy, A sequence of inequalities for certain sets of concurrent Cevians, Elem. Math., 35(1980), 145—146.

[4]S. Izumi(泉), K. Kobayashi(小林), T. Takahashi(高桥), On some inequalities, Proc. Phys. Math. Soc., (3) 16(1934), 345—351.

[5]D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volence, J. Chen(陈计), Addenda to the monograph "Recent Advances in Geometric Inequalities", Part I, 宁波大学学报(理工版), 1991年第2期, 79—145.

[6]陈计，征解问题68的编者注，数学通讯，1993年第7期，41.

[7]A. Bager, A family of goniometric inequalities, Univ, Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak, Ser, Mat, Fiz., No. 338—352(1971), 5—25.

[8]A. W. Walker, M. G. Greening, Problem E 2388, Amer. Math. Monthly, 79(1972), 1135 and 80(1973), 1142—1143.

[9]王振，征解问题129(b)，数学通讯，1993年第12期，35.

[10]司徒凌波，征解问题135*，数学通讯，1994年第5期，35.

[11]杨任尔、陈计，征解问题68(b)，数学通讯，1991年第5期，41；1993年第7期，40—42.

三角形中的负一次不等式

陈　计　陈聪杰

浙江宁波大学数学系(315211)

§1　引言

我们在文[1]中给出了涉及△ABC常见线段的35个基本不等式.本文中,我们从18个负一次规范函数(见§2)之间的120多个不等式中,发现了23个基本不等式;其中18个易知其成立,另外5个作为猜想留给读者.

本文延用文[1]的记号.

§2　有向图

下列18个正体字母a～r所表示的负一次对称函数,在a=b=c=1时,取值为$2\sqrt{3}$,我们称之为规范的.

$$\mathrm{a}=\frac{1}{r}=\sum\frac{1}{r_a}=\sum\frac{1}{h_a}$$

$$\mathrm{b}=\frac{2}{R}\qquad\qquad \mathrm{c}=\frac{3\sqrt{3}}{s}$$

$$\mathrm{d}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}\qquad\qquad \mathrm{e}=\sum\frac{1}{m_a}$$

$$\mathrm{f}=\sum\frac{1}{w_a}\qquad \mathrm{g}=\sum\frac{1}{g_a}$$

$$\mathrm{h}=\sum\frac{1}{n_a}\qquad \mathrm{i}=\sum\frac{1}{k_a}$$

$$\mathrm{j}=\sum\frac{1}{c_a}\qquad \mathrm{k}=\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AI}$$

$$\mathrm{l}=\frac{2}{3}\sum\frac{1}{A\Gamma}\qquad \mathrm{m}=\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AN}$$

$$\mathrm{n}=\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AK}\qquad \mathrm{o}=\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AJ}$$

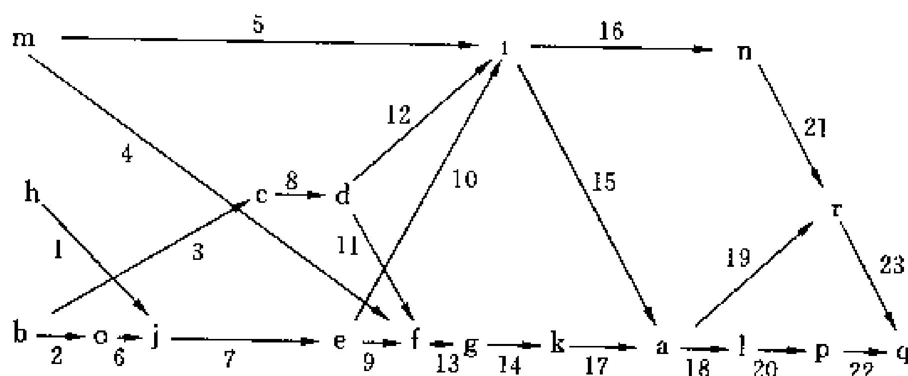
$$\mathrm{p}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(\Gamma)}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(J)}$$

$$\mathrm{q}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(N)}\qquad \mathrm{r}=\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(K)}$$

我们用箭头及标号表示它们之间的不等关系.例如:用 $\mathrm{r}\xrightarrow{23}\mathrm{q}$ 表示不等式

$$\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(K)}\leqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(N)}. \tag{23}$$

这样,对任意△ABC,有下图表示的不等式族:



§3 不等式

定理 1 h→j:

$$\sum\frac{1}{n_a}\leqslant\sum\frac{1}{c_a}.\tag{1}$$

证明　在[1]定理 34 证明中，已有 $n_a\geqslant c_a$，从而不等式(1)显然.

定理 2　b→o：

$$\frac{2}{R}\leqslant\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AJ}.\tag{2}$$

证明　在[1]定理 31 证明中，已介绍了

$$\sum AJ^2\leqslant 3R^2;\tag{2.1}$$

再用幂平均的单调性，

$$M_{-1}(AJ)\leqslant M_2(AJ)\leqslant R.\tag{2.2}$$

定理 3　b→c：

$$\frac{2}{R}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{s}.\tag{3}$$

注记：这等价于 **GI** 5.3：

$$\sum a\leqslant 3\sqrt{3}R.\tag{3.1}$$

猜想 4　m→f：

$$\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AN}\leqslant\sum\frac{1}{w_a}.\tag{4}$$

猜测：$M_k(AN)\geqslant\frac{2}{3}M_k(w_a)$，　　(4.1)

其中 $k\leqslant 5$.

猜想 5　m→i：

$$\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AN}\leqslant\sum\frac{1}{k_a}.\tag{5}$$

猜测：$M_k(AN)\geqslant\frac{2}{3}M_k(k_a)$，　　(5.1)

其中 $k\leqslant 6$.

定理 6　o→j：

$$\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AJ}\leqslant\sum\frac{1}{c_a}. \tag{6}$$

注记：在[1]定理 30 证明中，我们已建立了

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k\sum AJ^k\leqslant\sum c_a{}^k, \tag{6.1}$$

其中 $k\leqslant -1$ 或 $k>0$.

定理 7 j→e：

$$\sum\frac{1}{c_a}\leqslant\sum\frac{1}{m_a}. \tag{7}$$

证明 $[b(s-b)+c(s-c)^2]^2(4c_a{}^2-4m_a{}^2)$

$$=(b-c)^2(s-a)[3a^2(s-a)+4a(s-a)^2+4(b+c)(s-b)(s-c)]\geqslant 0, \tag{7.1}$$

即 $c_a\geqslant m_a$，从而不等式(7)显然.

定理 8 c→d：

$$\frac{3\sqrt{3}}{s}\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}. \tag{8}$$

证明 用幂平均的单调性，

$$M_{-1}(a)\leqslant M_1(a)=\frac{2}{3}s. \tag{8.1}$$

定理 9 e→f：

$$\sum\frac{1}{m_a}\leqslant\sum\frac{1}{w_a}. \tag{9}$$

证明 由 $m_a\geqslant w_a$ 知不等式(9)成立.

定理 10 e→i：

$$\sum\frac{1}{m_a}\geqslant\sum\frac{1}{k_a}. \tag{10}$$

证明 由 $k_a=\frac{2bc}{b^2+c^2}m_a\leqslant m_a$，知不等式(10)成立.

定理 11 d→f：

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}\leqslant\sum\frac{1}{w_a}. \tag{11}$$

注记：这个结果是1994年建立的.刘健[2]、杨学枝[3]、王振与陈计[4]分别将不等式(11)加细成：

$$\sum\frac{1}{w_a}\geqslant 3\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^{-1}\sum\frac{1}{a}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}, \tag{11.1}$$

$$\sum\frac{1}{w_a}\geqslant\frac{1}{3}\sum\sec\frac{A}{2}\cdot\sum\frac{1}{a}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}, \tag{11.2}$$

$$\sum\frac{1}{w_a}\geqslant\left(3\sum\frac{1}{w_bw_c}\right)^{1/2}\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}. \tag{11.3}$$

[4]的猜想一是：

$$M_k(w_a)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}M_k(a), \tag{11.4}$$

其中$\frac{\ln 4}{\ln 3-\ln 8}\leqslant k\leqslant\frac{\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$.

猜想 12 d→i：

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\frac{1}{a}\leqslant\sum\frac{1}{k_a}. \tag{12}$$

猜测：$M_k(k_a)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}M_k(a)$， (12.1)

其中$\frac{\ln 4}{\ln 3-\ln 4}\leqslant k\leqslant\frac{\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$.

定理 13 f→g：

$$\sum\frac{1}{w_a}\leqslant\sum\frac{1}{g_a}. \tag{13}$$

证明 由于

$$\begin{aligned}&w_a^2-g_a^2\\&=\frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}-(s-a)\left[s-\frac{(b-c)^2}{a}\right]\\&=(b-c)^2(s-a)^2(2b+2c+a)/a(b+c)^2,\end{aligned} \tag{13.1}$$

所以 $w_a \geqslant g_a$，从而不等式(13)成立.

猜想 14 g→k：

$$\sum \frac{1}{g_a} \leqslant \frac{2}{3} \sum \frac{1}{AI}. \tag{14}$$

猜测：$\sum g_a{}^k \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^k \sum AI^k$， (14.1)

其中 $k \leqslant -1$ 或 $k > 0$.

定理 15 i→a：

$$\sum \frac{1}{k_a} \leqslant \sum \frac{1}{h_a}. \tag{15}$$

证明 由 $k_a \geqslant h_a$ 知不等式(15)成立.

猜测：$\sum k_a{}^k \leqslant \sum r_a{}^k$， (15.1)

其中 $k \leqslant -1$ 或 $k > 0$.

定理 16 i→n：

$$\sum \frac{1}{k_a} \leqslant \frac{2}{3} \sum \frac{1}{AK}. \tag{16}$$

注记：在[1]定理 10 证明中，我们已建立了

$$\sum k_a{}^k \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^k \sum AK^k, \tag{16.1}$$

其中 $k < 0$ 或 $k \geqslant 1$.

定理 17 k→a：

$$\frac{2}{3} \sum \frac{1}{AI} \leqslant \frac{1}{r}. \tag{17}$$

注记：A. Bager[5]指出此式等价于 **GI** 2.9：

$$\sum \sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{3}{2}; \tag{17.1}$$

1989 年，王振证明了(见[6])：

$$\sum \sin^p \frac{A}{2} \leqslant \frac{3}{2^p}, \tag{17.2}$$

其中 $p=\frac{\ln9-\ln4}{\ln2}$，即有

$$M_k(AI)\geqslant 2r, \tag{17.3}$$

其中 $k\geqslant p$.

猜测：$M_k(AI)\geqslant \frac{3}{2}M_k(h_a)$， (17.4)

其中 $k\geqslant -\frac{6}{5}$；

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k \sum AI^k \leqslant \sum {r_a}^k,$$

其中 $\frac{\ln2}{\ln3-\ln4}\leqslant k\leqslant\frac{\ln2}{\ln2-\ln9}$ 或 $0<k<\frac{\ln2}{\ln3-\ln2}$.

猜想 18　a→Γ：

$$\frac{1}{r}\leqslant\frac{2}{3}\sum\frac{1}{A\Gamma}. \tag{18}$$

猜测：$M_k(A\Gamma)\leqslant 2r$， (18.1)

其中 $k\leqslant\frac{\ln4-\ln9}{\ln16-\ln5}$；

$$M_k(A\Gamma)\leqslant\frac{2}{3}M_k(h_a), \tag{18.2}$$

其中 $k\leqslant -\frac{2}{3}$；

$$M_k(A\Gamma)\leqslant\frac{2}{3}M_k(r_a), \tag{18.3}$$

其中 $\frac{\ln4}{\ln4-\ln5}\leqslant k\leqslant\frac{\ln2}{\ln3-\ln2}$.

定理 19　a→r：

$$\frac{1}{r}\leqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(K)}. \tag{19}$$

注记：在[1]定理 3 证明中，我们已建立了

$$\sum r_1^2(K)\leqslant 3r^2; \tag{19.1}$$

再用幂平均的单调性，

$$M_{-1}[r_1(K)]\leqslant M_2[r_1(K)]\leqslant r. \tag{19.2}$$

猜测：$M_k(h_a)\geqslant 3M_k[r_1(K)]$， (19.3)

其中 $|k|\leqslant 3$；

$$M_k(r_a)\geqslant 3M_k[r_1(K)], \tag{19.4}$$

其中 $k\geqslant -2$.

定理 20 l→p：

$$\frac{2}{3}\sum\frac{1}{A\Gamma}\leqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(J)}. \tag{20}$$

证明 由[1]定理 12 证明中 $A\Gamma\geqslant 2r_1(J)$，知不等式(20)成立.

猜测：$M_k(A\Gamma)\geqslant 2M_k[r_1(\Gamma)]$， (20.1)

其中 $k\geqslant -1$.

定理 21 n→r：

$$\frac{2}{3}\sum\frac{1}{AK}\leqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(K)}. \tag{21}$$

注记：J. M. Child 在 1939 年已证了更广的结论(见 **GI** 12.23)：

$$2\sum\frac{1}{AP}\leqslant\sum\frac{1}{r_1(P)}, \tag{21.1}$$

其中 P 是△ABC 内任意一点.

猜测：当 $k\geqslant k_0\doteq -1.271553303$ 时，有

$$M_k(AK)\geqslant 2M_k[r_1(K)], \tag{21.2}$$

其中 k_0 是方程 $4^k+2\cdot 2^k=1$ 的根.

定理 22 p→q：

$$\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(J)}\leqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(N)}. \tag{22}$$

注记：在[1]定理 14 证明中，我们已建立了

$$\sum r_1{}^k(J)\leqslant\sum r_1{}^k(N), \tag{22.1}$$

其中 $k<0$ 或 $k\geqslant 1$.

猜测：$\sum r_1{}^k(I)\leqslant\sum r_1{}^k(N)$，　　(22.2)

其中 $|k|\geqslant\frac{1}{2}$.

定理 23　[illegible]：

$$\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(K)}\geqslant\frac{1}{3}\sum\frac{1}{r_1(N)}. \tag{23}$$

证明　我们来建立更一般的结论：

$$\sum r_1{}^k(K)\leqslant\sum r_1{}^k(N), \tag{23.1}$$

其中 $|k|\geqslant 1$.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

$$r_1(K)\geqslant r_2(K)\geqslant r_3(K),\ r_1(N)\leqslant r_2(N)\leqslant r_3(N).$$

由[7]引理，要证不等式(23.1)，我们只需证：

$$\begin{cases}\sum\frac{1}{r_1(K)}\leqslant\sum\frac{1}{r_1(N)}, & (23.2)\\ \frac{1}{r_2(K)}+\frac{1}{r_1(K)}\leqslant\frac{1}{r_1(N)}+\frac{1}{r_2(N)}, & (23.3)\\ \frac{1}{r_3(K)}\leqslant\frac{1}{r_1(N)}; & (23.4)\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\sum r_1(K)\leqslant\sum r_1(N), & (23.5)\\ r_1(K)+r_2(K)\leqslant r_2(N)+r_3(N), & (23.6)\\ r_1(K)\leqslant r_3(N). & (23.7)\end{cases}$$

由

$$r_1(K)=\frac{a^2}{\sum a^2}h_a=\frac{2\Delta a}{\sum a^2},$$

$$r_1(N)=\frac{s-a}{\sum(s-a)}h_a=\frac{2\Delta}{s}\sum\frac{s-a}{a},$$

(23.2)式等价于

$$\sum a^2\sum\frac{1}{a}\leqslant s\sum\frac{a}{s-a}. \tag{23.8}$$

由于$\left(\frac{a^2}{s-a},\frac{b^2}{s-b},\frac{c^2}{s-c}\right)$与$\left(\frac{1}{a(s-a)},\frac{1}{b(s-b)},\frac{1}{c(s-c)}\right)$同序，所以可用加权的切比晓夫不等式(见 **MPF**，Ⅸ.(1.4))：

$$\begin{aligned}&\sum a^2\sum\frac{1}{a}\\&=\left[\sum(s-a)\cdot\frac{a^2}{s-a}\right]\left[\sum(s-a)\cdot\frac{1}{a(s-a)}\right]\\&\leqslant\left[\sum(s-a)\right]\left[\sum(s-a)\cdot\frac{a^2}{s-a}\cdot\frac{1}{a(s-a)}\right]\\&=s\sum\frac{a}{s-a}.\end{aligned} \tag{23.9}$$

由不等式(23.2)，要证(23.3)式，我们只需证

$$\frac{1}{r_1(K)}\geqslant\frac{1}{r_3(N)}, \tag{23.10}$$

即

$$\frac{\sum a^2}{sa}\geqslant\frac{c}{s-c}. \tag{23.11}$$

由于

$$\begin{aligned}&(s-c)\sum a^2-sca\\&=a^3+a^2b-2a^2c+ab^2-abc+b^3-b^2c+bc^2-c^3\\&=a^2(a-c)+(b-c)(a^2+ab+b^2+c^2)\\&\geqslant 0,\end{aligned} \tag{23.12}$$

所以不等式(23.11)成立，从而(23.3)式得证.

不等式(23.4)等价于

$$\frac{\sum a^2}{sc}\leqslant\frac{a}{s-a}, \tag{23.13}$$

这由$sca-(s-a)\sum a^2=(a-b)(a^2+b^2+bc+c^2)+c^2(a-c)\geqslant 0$即得.

由[1]定理 3、5、8、14 得

$$\begin{aligned}&\sum r_1(K)\leqslant\sum r_1(I)\leqslant\sum r_1(G)\\ \leqslant&\sum r_1(J)\leqslant\sum r_1(N),\end{aligned}\tag{23.14}$$

从而有不等式(23.5);再由(23.4)式,得不等式(23.6);而不等式(23.7)即为(23.10).

猜测:当 $k\geqslant k_0\doteq0.482147185$ 时,不等式(23.1)成立;其中 k_0 是方程 $1+2^{k-1}=3^k$ 的根.

参考文献

[1]陈计、陈聪杰,三角形中的线性不等式,几何不等式在中国,江苏教育出版社,1996 年第一版,88--114.

[2]刘健,一些新的三角形不等式,中学数学(江苏),1994 年第 5 期,9—12.

[3]杨学枝,关于三角形角平分线的两个不等式,中学数学(武汉),1994 年第 7 期,30--31.

[4]王振、陈计,两个猜想不等式的加强及其它,中学教研(数学版),1994 年第 7—8 期合刊,51—53.

[5]A. Bager, A family of goniometric inequalities, Univ. Beograd, Publ, Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 338—352 (1971), 5—25.

[6]杨任尔,Child 不等式与 Kooistra 不等式的加强,初等数学研究论文选,上海教育出版社,1992 年第一版,359—364.

[7]陈计,Guggenheimer 不等式的指数推广,数学通讯,1989 年第 12 期,3.

关于三角形类似重心的垂足三角形

陈胜利

福建南安市五星中学(362341)

文[1]~[4]讨论了三角形与其关于垂心、内心、重心的垂足三角形的各主要不变量之间的关系，获得了一系列深刻的结果. 本文进而探讨类似重心的垂足三角形的一些相近的性质.

如图 1，AA_0，BB_0，CC_0 为$\triangle ABC$ 的中线，AA_1，BB_1，CC_1 为其等角共轭线，称为类似中线. 它们满足：

$\angle BAA_0=\angle A_1AC$，$\angle CBB_0=\angle B_1BA$，$\angle ACC_0=\angle C_1CB$，(1)

从而可得

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{c^2}{b^2},\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{a^2}{c^2},\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{b^2}{a^2} \tag{2}$$

故由 Ceva 定理知三条类似中线交于一点 L，称它为$\triangle ABC$ 的类似重心或 Lemoine 点.

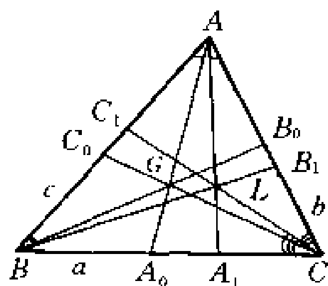


图 1

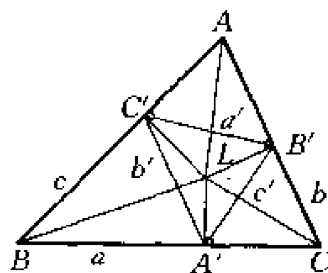


图 2

如图 2,作 L 关于$\triangle ABC$ 的垂足三角形 $A'B'C'$.设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$的三边,三中线,面积,外接圆半径,内切圆半径分别为 a、b、c,m_a、m_b、m_c,Δ,R,r 和 a'、b'、c',m_a'、m_b'、m_c',Δ',R',r',并记

$$K=\frac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}, \tag{3}$$

则有

$$m_a'=\frac{3}{2}Ka, m_b'=\frac{3}{2}Kb, m_c'=\frac{3}{2}Kc \tag{4}$$

$$a'=2Km_a, b'=2Km_b, c'=2Km_c, \tag{5}$$

$$\frac{\Delta'}{\Delta}=3K^2, \tag{6}$$

$$\frac{R'}{R}=\frac{8Km_am_bm_c}{3abc}, \tag{7}$$

$$\frac{r'}{r}=\frac{3K(a+b+c)}{2(m_a+m_b+m_c)}. \tag{8}$$

事实上,由(1),(2)知

$$S_{\triangle LBC}:S_{\triangle LCA}:S_{\triangle LAB}=a^2:b^2:c^2, \tag{9}$$

$$\therefore LA':LB':LC'=a:b:c. \tag{9'}$$

令 $$LA'=K'a, LB'=K'b, LC'=K'c, \tag{10}$$

则由

$$\Delta=\frac{1}{2}(a\cdot LA'+b\cdot LB'+c\cdot LC')=\frac{K'}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

及(3)式知

$$K'=K=2\Delta/\sum a^2. \tag{3'}$$

面由(9′),(10),(3′)易知

$$S_{\triangle LB'C'}=S_{\triangle LC'A'}=S_{\triangle LA'B'}=K^2abc/(4R). \tag{11}$$

可见 L 是$\triangle A'B'C'$的重心,从面由(10),(3′)知

$$m_a'=\frac{3}{2}LA'=\frac{3}{2}Ka, \cdots \tag{4}$$

由余弦定理，(10)，(3′)及中线长公式有

$$a'^2 = LB'^2 + LC'^2 - 2LB' \cdot LC' \cdot \cos(\pi - A)$$
$$= K^2(b^2 + c^2 + 2bc\cos A) = 4K^2 m_a^2,$$

$$\therefore a' = 2Km_a, \cdots \tag{5}$$

由 $\Delta' = S_{\triangle LB'C'} + S_{\triangle LC'A'} + S_{\triangle LA'B'}$ 及(11)式有

$$\Delta' = 3K^2\Delta. \tag{6}$$

由 $\Delta = abc/(4R)$，$\Delta' = a'b'c'/(4R')$ 及(5)，(6)有

$$\frac{R'}{R} = \frac{\triangle a'b'c'}{\triangle' abc} = \frac{8Km_a m_b m_c}{3abc}. \tag{7}$$

由 $\Delta = \frac{1}{2}(a+b+c)r$，$\Delta' = \frac{1}{2}(a'+b'+c')r'$ 及(5)，(6)有

$$\frac{r'}{r} = \frac{\Delta'(a+b+c)}{\Delta(a'+b'+c')} = \frac{3K(a+b+c)}{2(m_a+m_b+m_c)}. \tag{8}$$

另外，由关系式(4)，(5)，(6)，我们还容易导出关于三角形三边，三中线及面积的如下：

Klamkin **对偶定理**　齐次不等式

$$F(a, b, c, m_a, m_b, m_c, \sqrt{\Delta}) \geqslant 0, \tag{12}$$

对任意$\triangle ABC$ 成立的充要条件是不等式

$$F(4m_a, 4m_b, 4m_c, 3a, 3b, 3c, \sqrt{12\Delta}) \geqslant 0, \tag{13}$$

对任意$\triangle ABC$ 成立.

事实上，对类似重心 L 的垂足$\triangle A'B'C'$ 使用不等式(12)即知“(12)⇒(13)”，对$\triangle A'B'C'$ 使用(13)即知“(13)⇒(12)”. 顺便指出，在上述“对偶代换”：

$$(a, \cdots, m_a, \cdots, \sqrt{\Delta}) \to (4m_a, \cdots, 3a, \cdots, \sqrt{12\Delta}) \tag{14}$$

下，(3)式中的 K 保持不变：

$$K = \frac{2\Delta}{\sum a^2} \to \frac{2 \times 12\Delta}{4^2 \sum m_a^2} = \frac{2\Delta}{\sum a^2} = K. \tag{15}$$

应用上述诸性质，我们得到了下面的定理.

定理 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$(L的垂足三角形)中,有

1° $\Delta \geqslant 4\Delta'$;

2° $R \geqslant 2R'$;

3° $r \geqslant 2r'$;

4° $\sum bc \geqslant 4\sum b'c'$;

5° $\sum a \geqslant 2\sum a'$;

6° $\sum a^2 \geqslant 4\sum a'^2$;

7° $\sum a^3 \geqslant 8\sum a'^3$;

8° $\sum a^4 \geqslant 16\sum a'^4$;

9° $\sum \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{2}\sum \frac{1}{a'}$;

10° $\sum \frac{1}{a^2} \leqslant \frac{1}{4}\sum \frac{1}{a'^2}$;

11° $\sum \frac{1}{a^3} \leqslant \frac{1}{8}\sum \frac{1}{a'^3}$;

12° $\prod a \geqslant 8\prod a'$;

13° $\sum \frac{a'}{a} \leqslant \frac{3}{2}$.

以上各式中,等号当且仅当ABC为正三角形时成立.

证明 1° 由(6),(3)及Weitzenböck不等式$\sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta$立得1°.

2° 由(7),(3)知2°等价于

$$\frac{\prod m_a}{\prod a} \leqslant \frac{3}{16K} = \frac{3\sum a^2}{32\Delta} \Leftrightarrow \prod m_a \leqslant \frac{3}{8}R\sum a^2,$$

而由$\prod m_a \leqslant \frac{1}{9}\sum m_a \cdot \sum m_a^2$, $\sum m_a \leqslant \frac{9}{2}R$及

$$\sum m_a^2 = \frac{3}{4}\sum a^2 \tag{16}$$

知上式成立.

3° 由(8),(3)知 3°等价于

$$\frac{\sum a}{\sum m_a}\leqslant\frac{1}{3K}=\frac{\sum a^2}{6\Delta},$$

而由 $\sum m_a\geqslant 9r$, $\sum a^2\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2$ 及 $\Delta=\frac{1}{2}r\cdot\sum a$ 知上式成立.

4° 由(5),(3)知 4°等价于

$$\frac{\sum m_b m_c}{\sum bc}\leqslant\frac{1}{16K^2}=\frac{\left(\sum a^2\right)^2}{64\Delta^2},$$

而由 $\sum a^2\geqslant\sum bc\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$ 及 $\frac{3}{4}\sum a^2=\sum m_a^2\geqslant\sum m_b m_c$ 知上式成立.

为推证 5°～11°,我们考虑一般表达式:

$$\sum a^t\geqslant 2^t\sum a'^t=(4K)^t\sum m_a^t\,(t>0),\tag{17}$$

$$\sum a^t\leqslant 2^t\sum a'^t=(4K)^t\sum m_a^t\,(t<0),\tag{18}$$

并应用上述 Klamkin 对偶定理将它们等价地化为

$$\sum m_a^t\geqslant(3K)^t\sum a^t=\left(\frac{6\Delta}{\sum a^2}\right)^t\sum a^t\,(t>0),\tag{17'}$$

$$\sum m_a^t\leqslant(3K)^t\sum a^t=\left(\frac{6\Delta}{\sum a^2}\right)^t\sum a^t\,(t<0),\tag{18'}$$

因而只要证明 $t=1,2,3,4,-1,-2,-3$ 时上式成立.

当 $t=1$ 时,(17')即为

$$\sum m_a\sum a^2\geqslant 6\Delta\sum a.$$

由

$$\sum m_a\geqslant 3\sqrt{\sqrt{3}\Delta}\text{及}\sum a^2\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\geqslant\frac{1}{3}\sum a\cdot\sqrt{12\sqrt{3}\Delta}$$

知上式成立，从而 5°得证；

当 $t=2$ 时，(17′)即为

$$\sum m_a^2 \cdot \sum a^2=\frac{3}{4}\left(\sum a^2\right)^2 \geqslant (6\Delta)^2.$$

它等价于 Weitzenböck 不等式，故 6°得证；

当 $t=3$ 时，(17′)即为

$$\left(\sum m_a^3\right)\left(\sum a^2\right)^3 \geqslant (6\Delta)^3 \sum a^3. \tag{19}$$

由已知不等式（见[5]例 4 或[6]. 例 19[P. 137]）：

$$m_a \geqslant \frac{b^2+c^2}{4R}, m_b \geqslant \frac{c^2+a^2}{4R}, m_c \geqslant \frac{a^2+b^2}{4R} \tag{20}$$

有

$$\sum m_a \geqslant \frac{\sum a^2}{2R}=\frac{2\Delta \sum a^2}{\prod a}. \tag{21}$$

又

$$\sum m_a^3 \geqslant \frac{1}{3}\left(\sum m_a\right)\left(\sum m_a^2\right)=\frac{1}{4}\left(\sum m_a\right)\left(\sum a^2\right),$$

因而欲证(19)，只要证

$$\left(\sum a^2\right)^5 \geqslant 432\Delta^2 \prod a \sum a^3. \tag{22}$$

为此，我们先证

$$27 \prod a \sum a^3 \leqslant \left(\sum a\right)^2\left(\sum a^2\right)^2 \tag{23}$$

记 $\sum a=2s$，则由熟知恒等式：

$$\sum a^2=2(s^2-4Rr-r^2), \sum bc=s^2+4Rr+r^2,$$

$$\prod a=4sRr, \sum a^3=3\prod a+\left(\sum a\right)\left(\sum a^2-\sum bc\right),$$

知(23)等价于

$$2(s^2-4Rr-r^2)^2 \geqslant 27Rr(s^2-6Rr-3r^2),$$

即

$$4s^2\geqslant 43Rr+4r^2+\sqrt{297R^2r^2-432Rr^3}.$$

而据 Gerretsen 不等式“$s^2\geqslant 16Rr-5r^2$”及 Euler 不等式“$R\geqslant 2r$”易证上式成立.

由(23)及$\left(\sum a\right)^2\leqslant 3\sum a^2$, $\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$ 显见(22)式成立，从而 7°得证；

当 $t=4$ 时,(17′)即为

$$\sum m_a^4\left(\sum a^2\right)^4\geqslant (6\Delta)^4\sum a^4, \tag{24}$$

而由$\sum m_a^4\geqslant \frac{1}{3}\left(\sum m_a^2\right)^2=\frac{3}{16}\left(\sum a^2\right)^2$,只要证

$$3\left(\sum a^2\right)^6\geqslant (12\Delta)^4\sum a^4$$

据文[7]中的不等式：

$$\sum a^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta\left(\frac{R}{2r}\right)^{1/2}, \sum a^4\leqslant 16\Delta^2\left(\frac{R}{2r}\right)^3 \tag{25}$$

即知上式成立，故 8°得证；

当 $t=-1$ 时,(18′)即为

$$6\Delta\cdot\sum\frac{1}{m_a}\leqslant\sum a^2\cdot\sum\frac{1}{a}. \tag{26}$$

由(20)式有

$$\sum\frac{1}{m_a}\leqslant\sum\frac{4R}{b^2+c^2}\leqslant\sum\frac{2R}{bc}=\frac{\sum a}{2\Delta},$$

又

$$\sum a^2\cdot\sum\frac{1}{a}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum a\right)^2\sum\frac{1}{a}\geqslant 3\sum a,$$

故知(26)式成立，9°得证；

当 $t=-2$ 时,(18′)即为

$$(6\Delta)^2\cdot\sum\frac{1}{m_a^2}\leqslant\left(\sum a^2\right)^2\sum\frac{1}{a^2}. \tag{27}$$

由(20)式有

$$\sum\frac{1}{m_a^2}\leqslant\sum\frac{4R^2}{b^2c^2}=\frac{\sum a^2}{4\Delta^2},$$

又$\sum\frac{1}{a^2}\sum a^2\geqslant 9$，故知(27)式成立，10°得证；

当$t=-3$时，(18′)即为

$$(6\Delta)^3\cdot\sum\frac{1}{m_a^3}\leqslant\left(\sum a^2\right)^3\sum\frac{1}{a^3},\tag{28}$$

而由(20)有

$$\sum\frac{1}{m_a^3}\leqslant\sum\frac{8R^3}{b^3c^3}=\frac{\sum a^3}{8\Delta^3},$$

于是只要证：

$$\left(\sum a^2\right)^3\sum\frac{1}{a^3}\geqslant 27\sum a^3$$

上式左边$\geqslant\left(\sum a\right)^2\left(\sum a^2\right)^2\prod\frac{1}{a}\geqslant$右边(据(23))，故(28)成立，从而11°得证.

12°　由(5)，(3)知12°等价于

$$\frac{\prod m_a}{\prod a}\leqslant\frac{1}{64K^3}$$

而由2°的等价式$\frac{\prod m_a}{\prod a}\leqslant\frac{3}{16K}$及$K^2\leqslant 1/12$(见前)即知上式成立.

13°　由(5)，(3)知13°等价于

$$\sum\frac{m_a}{a}\leqslant\frac{3}{4K},$$

而由Klamkin对偶定理，上式又等价于

$$\sum\frac{a}{m_a}\leqslant\frac{1}{K}=\frac{\sum a^2}{2\Delta}.$$

应用不等式(20),有

$$\sum\frac{a}{m_a}\leqslant\sum\frac{4aR}{b^2+c^2}\leqslant\sum\frac{2aR}{bc}=\frac{\sum a^2}{2\Delta},$$

13°得证.

定理证毕.

注意到13°可表示为

$$M_1\left(\frac{a'}{a},\frac{b'}{b},\frac{c'}{c}\right)\leqslant\frac{1}{2},\tag{29}$$

5°～12°可统一表示为

$$M_\mu(a,b,c)\geqslant2\cdot M_\mu(a',b',c'),\tag{30}$$

其中$\mu=1,2,3,4,-1,-2,-3,0$,M_t表示t次幂平均.一般地,我们有如下猜想:

猜想 当$\lambda\leqslant\frac{\ln3}{\ln2}$时,有

$$M_\lambda\left(\frac{a'}{a},\frac{b'}{b},\frac{c'}{c}\right)\leqslant\frac{1}{2};\tag{31}$$

而当$-10\leqslant\mu\leqslant30$时,(30)式成立.

参考文献

[1]苏化明,从一道IMO试题谈起,中学数学(苏州),1991(1).

[2]莫颂清,读"从一道IMO试题谈起"一文的体会,中学数学(苏州),1992(12).

[3]苏化明,关于重心的垂足三角形的性质,中学数学(苏州),1994(3).

[4]陈计,关于三角形重心的垂足三角形,数学竞赛(27),湖南教育出版社,1995.

[5]陈胜利,类似重心趣谈,福建中学数学,1994(3).

[6]黄宣国,凸函数与琴生不等式,上海教育出版社,1991.

[7]陈胜利,关联若干著名不等式的一个不等式链,湖南数学通讯,1995(1).

Euler 不等式的推广

宋　庆

江西永修县一中(330304)

1765 年,著名数学家 L. Euler 建立了以下关于三角形外接圆半径 R 与内切圆半径 r 的三角形不等式[1]:

$$R \geqslant 2r, \tag{1}$$

等号成立当且仅当三角形为正三角形.

由于(1)式具有简单而又不平凡的特点,所以,它至今仍在几何不等式领域保持着高水平的地位.

本文旨在将 Euler 不等式(1)推广到两个三角形.

为简洁计,在下文定理、推论的推导中均略去对等号成立条件的讨论,并约定:a、b、c、s、R、r、m_a、m_b、m_c 分别表示$\triangle ABC$ 的三边长,半周长,外接圆半径,内切圆半径及三中线长,对$\triangle A'B'C'$ 用类似的记号.

定理 1　在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中,有

$$\frac{R}{r'} \geqslant \frac{2}{3}\left(\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'}+\frac{c}{c'}\right), \tag{2}$$

等号成立当且仅当两三角形均为正三角形.

证明　在不等式[2]

$$(x+y+z)^2 \geqslant 2\sqrt{3}\,(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C) \tag{3}$$

$$(x、y、z \in R^+)$$

中，令 $x=\sin A'$，$y=\sin B'$，$z=\sin C'$，再运用(3)式之特例：

$$\sin A'+\sin B'+\sin C'\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2},\tag{4}$$

可得(2)式.

当$\triangle A'B'C'\backsim\triangle ABC$时，(2)式变成为(1)式，故不等式(2)推广了不等式(1).

在(2)式中，令 $a=b=c$，然后作变换：

$$a'\to a, b'\to b, c'\to c,$$

可得如下推论：

推论 1 在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{3}(\csc A+\csc B+\csc C).\tag{5}$$

在(2)式中，令 $a'=a$，$b'=c$，$c'=b$，便得如下推论：

推论 2 在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leqslant\frac{3R}{2r}-1.\tag{6}$$

不等式(6)弱于 V. Băndilă 于 1985 年建立的不等式[3]：

$$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\leqslant\frac{R}{r}.\tag{7}$$

在(2)式中，令 $a'=b$，$b'=c$，$c'=a$，即得如下推论：

推论 3[4] 在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).\tag{8}$$

注意到 M. S. Klamkin 于 1971 年建立的不等式[3]：

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\tag{9}$$

由(8)式便得不等式[5]、[6]：

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{2}{9}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).\tag{10}$$

在(2)式中，令 $a'=c, b'=a, c'=b$，
再将所得不等式与(8)式相加，可得如下推论：

推论 4[3]　在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right). \tag{11}$$

不等式(11)属于 B. M. Milisavljević(1978).

在(2)式中，令 $a'=b+c, b'=c+a, c'=a+b$，并注意到这时 $s'r'=2s\sqrt{2Rr}$(参见[7])，可得如下推论：

推论 5　在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{8}{9}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)^2. \tag{12}$$

值得一提的是，不等式(11)强于不等式

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{4}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right), \tag{13}$$

但与不等式(12)不可比较.

在(2)式中，令

$$a'=\sqrt{a(s-a)}, b'=\sqrt{b(s-b)}, c'=\sqrt{c(s-c)},$$

且注意到 $2s'r'=sr$(参见[7])及不等式[3]：

$$\sqrt{a(s-a)}+\sqrt{b(s-b)}+\sqrt{c(s-c)} \leqslant \sqrt{2}\,s, \tag{14}$$

可得如下推论：

推论 6　在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{\frac{a}{s-a}}+\sqrt{\frac{b}{s-b}}+\sqrt{\frac{c}{s-c}}\right). \tag{15}$$

在(2)式中，令 $a'=m_a$，$b'=m_b$，$c'=m_c$，注意到 $r'=\dfrac{3sr}{2(m_a+m_b+m_c)}$(参见[3])，可得如下推论：

推论 7　在$\triangle ABC$中，有

$$\frac{R}{r} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\right)\frac{a+b+c}{m_a+m_b+m_c}. \tag{16}$$

进而，可得

$$\frac{R}{r}\geqslant\sqrt{3}\,\frac{a+b+c}{m_a+m_b+m_c}. \tag{17}$$

上述推论中诸不等式的等号均当且仅当三角形为正三角形时成立.

定理 2 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中，有

$$\begin{aligned}&\sin(A+A')+\sin(B+B')+\sin(C+C')\\&\geqslant 4\sqrt{\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'},\end{aligned} \tag{18}$$

等号成立当且仅当两三角形相似.

证明 ∵ $\sin A\sin A'$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}[\cos(A-A')-\cos(A+A')]\\&\leqslant\frac{1}{2}[1-\cos(A+A')]=\sin^2\frac{A+A'}{2},\end{aligned}$$

∴ $\sin\frac{A+A'}{2}\geqslant\sqrt{\sin A\sin A'}$.

同理可得

$$\sin\frac{B+B'}{2}\geqslant\sqrt{\sin B\sin B'},$$

$$\sin\frac{C+C'}{2}\geqslant\sqrt{\sin C\sin C'}.$$

以上三式相乘，便得

$$\begin{aligned}&\sin\frac{A+A'}{2}\sin\frac{B+B'}{2}\sin\frac{C+C'}{2}\\&\geqslant\sqrt{\sin A\sin B\sin C\sin A'\sin B'\sin C'}.\end{aligned} \tag{19}$$

又(参见[3])

$$\begin{aligned}&\sin(A+A')+\sin(B+B')+\sin(C+C')\\&=4\sin\frac{A+A'}{2}\sin\frac{B+B'}{2}\sin\frac{C+C'}{2},\end{aligned} \tag{20}$$

从而，(18)式成立.

当 $A'=B, B'=C, C'=A$ 时，(18)式成为(1)式的等价不等式（参见[1]）：

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}. \tag{21}$$

故不等式(18)推广了不等式(1).

不久前，本文作者曾就不等式(4)的一个推广：

$$\sin(A+A')+\sin(B+B')+\sin(C+C')\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{22}$$

讨教于宁波大学陈计先生，他当即指出(22)式的一般情形已出现于专著[3]. 此后，作者采用(18)式的证明方法，证得一个较(22)式更强的结果，即如下定理：

定理 3 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中，有

$$\begin{aligned}&\sin(A+A')+\sin(B+B')+\sin(C+C')\\&\leqslant 4\cos\frac{A+A'}{4}\cos\frac{B+B'}{4}\cos\frac{C+C'}{4},\end{aligned} \tag{23}$$

等号成立当且仅当 $A+A'=B+B'=C+C'$.

证明从略.

当 $A'=A, B'=B, C'=C$ 时，(23)式成为(21)式或(1)式，故不等式(23)推广了不等式(1).

注记 1：与(19)式的证明相仿，我们尚可证得不等式(1)的如下推广（参见[8]）：

$$\begin{aligned}&\sin\frac{A}{2^n}\sin\frac{B}{2^n}\sin\frac{C}{2^n}\\&\leqslant\sin\frac{B+C}{2^{n+1}}\sin\frac{C+A}{2^{n+1}}\sin\frac{A+B}{2^{n+1}},\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $n\geqslant 0$.

注记 2：不等式(2)等价于

$$\begin{aligned}&\csc B\csc C+\csc C\csc A+\csc A\csc B\\&\geqslant\frac{4}{3}(\csc A\sin A'+\csc B\sin B'+\csc C\sin C').\end{aligned} \tag{25}$$

类似此式，作者新近证得的另一有趣结果是：

$$\csc A'(\csc B+\csc C)+\csc B'(\csc C+\csc A)$$
$$+\csc C'(\csc A+\csc B)\geqslant 8. \tag{26}$$

注记 3：(5)、(6)、(8)、(11)、(12)及(15)诸式均加强了(1)式，出于对推论 7 的同样考虑，我们猜想：

$$\frac{a}{m_a}+\frac{b}{m_b}+\frac{c}{m_c}\geqslant 4\,\frac{m_a+m_b+m_c}{a+b+c}. \tag{27}$$

参考文献

[1]O. Bottema 等著，单墫译，几何不等式，北京大学出版社，1991.

[2]安振平，一个不等式及其推论，数学教学通讯，2(1987).

[3]D. S. Mitrinović等著，陈计等译，几何不等式的新进展，北京大学出版社，1994.

[4]安振平、宋庆、李同林，谈欧拉不等式 $R\geqslant 2r$，中学数学(江苏)，5(1993).

[5]宋庆，数学问题 884 及解答，数学通报，3(1994)，4(1994).

[6]宋庆，Euler 不等式的两个加强，湖南数学通讯，3(1994).

[7]刘保乾，用生成三角形法证明涉及两个三角形的不等式，数学竞赛(6－9)，湖南教育出版社，1991.

[8]宋庆，数学问题 922 及解答，数学通报，11(1994)，12(1994).

100个待解决的三角形不等式问题

刘　健

华东交通大学(南昌,330013)

"……为了引诱我们,数学问题应是困难的,但不是完全不可解决的,免得它嘲弄我们的努力,它应是通往潜藏着真理的曲径上的引路人,最后它应该以成功地解答的喜悦作为对我们的奖励."

——D.希尔伯特

三角形,是最简单又最重要的几何图形,古典的欧氏几何已从许多方面对其纯粹的几何性质作了大量的描述,有关的理论、方法已发展得十分成熟.然面,长期以来人们对关于三角形的不等式的研究缺乏重视,一些重要的定理迟至近代才产生.近些年来,随着不等式理论的迅速发展,三角形不等式也呈现了蓬勃发展的趋势.但综观目前的研究状况,可以肯定这一领域尚有许多方面有待突破.

问题是数学的心脏.希尔伯特早曾断言:"只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止."那么,三角形不等式这一领域是否有大量的

问题存在呢？回答是完全肯定的.

近年来，作者与刘毅合作，设计了用于发现、验证三角形不等式的高级语言程序，并通过应用计算机发现了大批新的三角形不等式. 本文将介绍一些未解决的三角形不等式问题（以猜想为主），其中一部分是笔者在研究有关问题时作出猜测后在计算机上加以验证而来的；另一部分则没有什么背景，仅是应用计算机直接搜寻后提出的.

§1 关于三角形常见的几何元素的不等式问题

首先将各符号表示的意义说明如下：$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 分别记为 a,b,c，相应边上的中线、内角平分线、高线和旁切圆半径分别设为 $m_a,m_b,m_c;w_a,w_b,w_c;h_a,h_b,h_c;r_a,r_b,r_c$，$\triangle ABC$ 的半周长、内切圆半径、外接圆半径和面积依次记成 s,r,R,Δ.

另外，文中符号 (Δ_a) 表示它前面的猜想不等式是对锐角三角形而言. 如不等式后无此符号，则它是对任意三角形的猜想. 符号 shc 表示猜想或问题，$\sum$ 表示轮换求和，$\prod$ 表示轮换求积.

1. 有关 A,B,C,a,b,c,s,r,R,Δ 的不等式问题

1991 年，陈计曾猜想在$\triangle ABC$ 中成立着三角不等式[1]：

$$\sum\cos^3\frac{A}{2}<2.$$

从[2,p. 305]知，他后来已证得上式. 不过，和式 $\sum\cos^3\frac{A}{2}$ 仍值得研究，杨之在[2]中就问及 $\sum\cos^3\frac{A}{2}$ 的下限是什么？笔者应用计算机考察了 $\sum\cos^3\frac{A}{2}$ 的界，从而提出如下猜想.

shc1 (a) $\sum\cos^3\frac{A}{2}>1+\frac{1}{\sqrt{2}}$；

$$\text{(b)}\quad \sum\cos^3\frac{A}{2}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}.\ (\Delta_0)$$

不等式

$$\sum\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{3}\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

是一个已知的结果，陈计考虑了它的加强，提出

shc2 $\frac{4}{3}\sum\cos B\cos C\leqslant\left(\frac{4}{9}\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^8.$

注：因成立

$$\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{9}{4},$$

故上式加强了不等式：

$$\sum\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{3}\sum\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

目前，含有指数变量的三角不等式比较少见.下面，我们提出几个此类不等式.

shc3 当 $k>2$ 时，有

$$\sum\sin^k A\leqslant 3^{k/2}\sum\cos^k A.$$

shc4 当 $k\geqslant\frac{13}{10}$ 或 $k<0$ 时，有

$$\sum\csc^k\frac{A}{2}\geqslant 3^{k/2}\sum\csc^k A.$$

shc5 当 $2\leqslant k\leqslant 7$ 时，有

$$\sum\frac{\sin^k A}{\cos^k B+\cos^k C}\leqslant\frac{3^{k/2+1}}{2}.$$

1991 年，D. M. Miloševic曾证得不等式[1]：

$$\sum\frac{a}{b+c}\sin^2\frac{A}{2}\geqslant\frac{3}{8}.$$

笔者发现将其中的 $\sin^2\frac{A}{2}$ 换成更小的值 $\cos B\cos C$ 后，不等号反向了，但未得出证明，为此提出猜想：

shc6 $\sum \frac{a}{b+c}\cos B\cos C\leqslant\frac{3}{8}$.

最近，笔者证明了

$$\sum \frac{a}{b+c}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

现猜测此不等式还可作以下一般的指数推广：

shc7 当 $k>0$ 时，有

$$\sum \frac{a}{b+c}\operatorname{ctg}^k\frac{A}{2}\geqslant\frac{3^{k/2+1}}{2}.$$

类似于上的一个似乎更困难的问题是下面的猜想：

shc8 当 $k>0$ 时，有

$$\sum \frac{b+c}{a}\cos^k\frac{A}{2}\geqslant\frac{3^{k/2+1}}{2^{k-1}}.$$

1993 年，作者[3]对最大角不超过 120°的三角形给出了一般情形下的 Hadwiger 不等式[4]

$$\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+3\sum (b-c)^2$$

的加强：

$$\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+2\sum (b-c)^2.$$

这里，我们对锐角三角形提出类似的一个猜想：

shc9 $\sum a^2\leqslant 4\sqrt{3}\Delta+\frac{25}{16}\sum (b-c)^2$. $\{\Delta_a\}$

A. W. Walker 早在 1971 年曾建立有关锐角三角形的二次不等式：

$$s^2\geqslant 2R^2+8Rr+3r^2.$$

这类不等式看来很值得研究，我们于此提出一个与 Walker 不等式不分强弱的猜想：

shc10 $5s^2\geqslant 19R^2+59r^2$. $\{\Delta_a\}$

本文作者在 1992 年曾对锐角三角形建立了线性不等式：

$$s \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6}(5R+8r).$$

由此提出以下一个自然的问题：

shc11 对锐角$\triangle ABC$，求使 $s \geqslant kR+(3\sqrt{3}-2k)r$ 成立的最大 k 值.

2. 有关 m_a, m_b, m_c 的不等式问题

1993 年，作者[3]证明并推广了曾登高与徐文斌提出的一个猜想：

$$\sum am_a > 12Rr.$$

现猜测此不等式对锐角三角形还可加强为非严格的下式：

shc12 $\quad \sum am_a \geqslant 9\sqrt{3}Rr. \qquad \{\Delta_a\}$

下面介绍一个涉及内角与半周的中线不等式：

shc13 $\quad \sum m_a^2 \cos(B-C) \leqslant s^2.$

用 R 与 r 可以给出和式 $\sum m_a$ 的一个下界估计：

$$\sum m_a \geqslant 3\sqrt{(4R+r)r}.$$

对于锐角三角形，我们猜测有更好的估计式：

shc14 $\quad \sum m_a \geqslant \frac{9}{2}\sqrt{2Rr}. \qquad \{\Delta_a\}$

接下去，我们介绍一组有关中线与边长的猜想不等式：

shc15 (a) $\quad \sum(b+c)m_a \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}s^2; \qquad \{\Delta_a\}$

(b) $\quad \sum(a+m_a)^2 \geqslant \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})^2 \sum bc; \qquad \{\Delta_a\}$

(c) $\quad \sum m_a(b+c)^2 \geqslant \frac{16\sqrt{3}}{9}s^3;$

(d) $\quad \sum bcm_a \geqslant \frac{4\sqrt{3}}{9}s^3; \qquad \{\Delta_a\}$

(e) $\sum a(m_b+m_c)^2 \geqslant \frac{8}{3}s^3$;

(f) $\sum (m_b+m_c)(b^2+c^2) \geqslant \frac{16\sqrt{3}}{9}s^3$; $\{\Delta_a\}$

(g) $\sum \frac{m_b m_c}{bc} \geqslant \frac{3}{2}\sum \frac{a}{b+c}$; $\{\Delta_a\}$

(h) $\sum (m_b+m_c)^2 \geqslant 4s^2$. $\{\Delta_a\}$

不久前，笔者根据一个加权三角形不等式推证出有关中线倒数和的不等式：

$$\sum \frac{1}{m_a} \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)\sqrt{\frac{R}{2r}},$$

注意到 Euler 不等式"$R \geqslant 2r$"，经考察进而猜测上式还可加强如下：

shc16 $$\sum \frac{1}{m_a} \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right).$$

下面再给出有关 m_a, m_b, m_c 与 R, r 之间的一个不等式：

shc17 $$\sum \frac{1}{(m_b+m_c)^2} \leqslant \frac{1}{6Rr}. \qquad \{\Delta_a\}$$

最近，笔者对任意$\triangle ABC$ 证明了

$$\sum m_a \cos\frac{B-C}{2} \leqslant \sqrt{3}s.$$

在考虑其指数推广时，提出了下述

shc18 设 $k \geqslant 3$，则

$$\sum m_a^k \cos\frac{B-C}{2} \geqslant 3^{1-k/2} \cdot s^k. \qquad \{\Delta_a\}$$

3. 有关 w_a, w_b, w_c 的不等式问题

早在 1943 年，L. A. Santaló就已证得和式$\sum w_a$ 与 s 间有严格不等式[4]：$\sum w_a > s$. 笔者在不久前证得加强式：

$$\sum w_a \geqslant \sqrt{1+\frac{8r^2}{R^2}}s.$$

此式进而促使笔者提出较之更强的下式：

shc19 $\sum w_a \geqslant \sqrt{1+\frac{4r}{R}}s.$

下面再给出和式$\sum w_a$与边长的一个猜想不等式：

shc20 $\sum w_a \geqslant \frac{9\sqrt{3}}{2}\frac{abc}{\sum a^2}.$

从[4,p.73]知，$\sum w_a$ 与 R, r 之间成立线性不等式：

$$\sum w_a \leqslant 3R+3r.$$

经过考察，我们发现此式中的系数还可改进，即存在小于 3 的常数 k 使不等式

$$\sum w_a \leqslant kR+(9-2k)r$$

成立，进而提出

shc21 求使$\sum w_a \leqslant kR+(9-2k)r$ 成立的最小 k 值.

下面介绍刘毅提出的一个涉及 w_a, w_b, w_c 与 R, r 的猜想不等式：

shc22 $\sum w_a^2 \geqslant \frac{27}{2}Rr.$

接下去给出一组有关内角平分线与边长的猜想不等式：

shc23 (a) $\sum (a+w_a)^2 \leqslant \frac{1}{3}(2+\sqrt{3})^2 s^2$;

(b) $\sum a(w_b+w_c)^2 \leqslant \frac{8}{3}s^3$;

(c) $\sum (b+c)(w_b+w_c)^2 \leqslant \frac{16}{3}s^3$;

(d) $\sum (w_b+w_c)(b^2+c^2) \leqslant \frac{16\sqrt{3}}{9}s^3$;

(e) $\sum(w_b+w_c)(b^2+c^2)\geqslant 6\sqrt{3}\,abc$; $\{\Delta_a\}$

(f) $\sum(w_b+w_c)(s-a)^2\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}abc$;

(g) $\sum w_a(b^2+c^2)\geqslant\frac{8\sqrt{3}}{9}s^2$;

(h) $\sum w_a^2\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}s^3$.

从[5,p.127]知，$\sum w_bw_c$ 与 $\sum bc$ 间成立不等式：

$$\sum w_bw_c\leqslant\frac{3}{4}\sum bc.$$

针对此不等式，我们提出更强的猜想：

shc24 $\sum(w_bw_c)^3\leqslant\frac{3}{64}\left(\sum bc\right)^3$.

1994 年 5 月，作者研究了有关 w_a,w_b,w_c 的对称式与面积 Δ 的不等式关系，证明了

$$\sum w_bw_c\geqslant 3\sqrt{3}\,\Delta.$$

在此提出两个类似的猜想不等式：

shc25 (a) $\left(\sum\frac{1}{w_a}\right)^2\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{\Delta}$;

(b) $\sum\frac{1}{w_bw_c}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{\Delta}$. $\{\Delta_a\}$

最近，杨学枝[6]、王振与陈计[7]用不同的方法证得了一个较深刻的不等式：

$$\sum\frac{w_a}{a}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

此不等式启发笔者考察了 $\sum\frac{w_b+w_c}{b+c}$ 的界，猜想成立下式：

shc26 $\sum\frac{w_b+w_c}{b+c}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

不久前，笔者对任意$\triangle ABC$证明了

$$\sum\frac{w_bw_c}{bc}\geqslant\frac{1}{3}\left(\sum\cos\frac{A}{2}\right)^2.$$

对于锐角$\triangle ABC$，我们猜想上述不等式还可加强如下：

shc27 $\sum\frac{w_bw_c}{bc}\geqslant\frac{9}{4}.$ $\{\Delta_a\}$

4. 有关 m_a, m_b, m_c 与 w_a, w_b, w_c 的不等式问题

1982 年，席竹华在证明

$$h_a+m_a+w_c\leqslant\sqrt{3}s$$

时，发现了一个很细致的不等式[18]：

$$\frac{1}{2}m_b+w_c\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(2a+b).$$

由此易知

$$\sum m_a+2\sum w_a\leqslant 3\sqrt{3}s.$$

针对这一不等式，我们应用计算机详细考察了$\sum m_a$，$\sum w_a$与s之间的不等式关系，提出

shc28 (a) $2\sum m_a+(\sqrt{3}-1)\sum w_a\leqslant(3+\sqrt{3})s$；

(b) $(18-8\sqrt{3})\sum m_a\geqslant 3s+(18-9\sqrt{3})\sum w_a.$

注：不等式(a)要强于

$$\sum m_a+2\sum w_a\leqslant 3\sqrt{3}s.$$

不久前，作者证明了有关中线与高线的不等式：

$$\sum am_a\geqslant\frac{2\sqrt{3}}{9}\left(\sum h_a\right)^2.$$

此式启发我们考察了$\sum am_a$与$\sum w_a^2$间的不等式关系，提出

shc29 $\sum am_a\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\sum w_a^2.$

下面给出一组类似的有待证实的不等式：

shc30 (a) $\sum m_a(w_b+w_c)\leqslant 2s^2$;

(b) $\sum m_a(w_b^2+w_c^2)\leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}s^3$;

(c) $\sum w_a(m_b^2+m_c^2)\leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}s^3$;

(d) $\sum m_a w_b w_c\leqslant \frac{9\sqrt{3}}{8}abc$;

(e) $\sum w_a(m_b^2+m_c^2)\geqslant \frac{9\sqrt{3}}{4}abc$; $\{\Delta_a\}$

(f) $\sum \frac{1}{m_a w_a}\geqslant \frac{4}{3}\sum \frac{1}{bc}$.

众所周知,在$\triangle ABC$中成立

$$\sum \frac{m_a}{a}\geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2},\ \sum \frac{a}{w_a}\geqslant 2\sqrt{3}.$$

现提出涉及这两个不等式左端的一个猜想:

shc31 $\sum \frac{a}{w_a}\geqslant \frac{4}{3}\sum \frac{m_a}{a}$.

容易证明

$$\sum \left(\frac{w_a}{b+c}\right)^2\leqslant \frac{9}{16}.$$

考虑其加强,我们提出

shc32 $\sum \frac{m_a^2+w_a^2}{(b+c)^2}\leqslant \frac{9}{8}$.

接着我们给出两个严格的不等式:

shc33 (a) $\sum \frac{m_b m_c}{w_b^2+w_c^2}>\frac{81}{128}$;

(b) $\sum \frac{(w_b+w_c)^2}{m_b^2+m_c^2}>\frac{8}{5}$.

从[5,p. 215]知,M. S. Klamkin 与 A. Meir 曾得到有关中线与高线的一个很有趣的不等式:

$$\sum h_a^2 \sum \frac{1}{m_a^2} \leqslant 9.$$

这里，我们提出涉及中线与角平分线的一个类似的不等式：

shc34 $\sum w_a^2 \sum \frac{1}{m_a^2} \geqslant 9.$

当 $k<0$ 时，很容易证明

$$\sum \frac{w_a^k}{m_b^k+m_c^k} \geqslant \frac{3}{2}.$$

困难的未解决的问题是

shc35 (a)当 $\frac{8}{5} \leqslant k \leqslant \frac{12}{5}$ 时，有

$$\sum \frac{w_a^k}{m_b^k+m_c^k} \geqslant \frac{3}{2};$$

(b)当 $\frac{8}{5} \leqslant k \leqslant 8$ 时，上式对锐角三角形成立；

(c)当 $0<k \leqslant \frac{9}{10}$ 时，有

$$\sum \frac{w_a^k}{m_b^k+m_c^k} \leqslant \frac{3}{2}. \qquad \{\Delta_a\}$$

5. 有关 w_a, w_b, w_c 与 r_a, r_b, r_c 的不等式问题

首先，我们提出几个分式型不等式：

shc36 证明或否定：

(a) $\sum \frac{1}{w_a+r_a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2s}$;

(b) $\sum \frac{1}{w_a+r_a} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \sum \frac{1}{a}$; $\qquad \{\Delta_a\}$

(c) $\sum \frac{1}{w_a^2+r_a^2} \geqslant \frac{1}{3Rr}$. $\qquad \{\Delta_a\}$

前面提到的不等式

$$\sum \frac{w_a}{a} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

启发作者发现并证明了

$$\sum \frac{r_a}{a} > \sqrt{3}.$$

这两个不等式又促使我们考察了和式$\sum \frac{w_a + r_a}{a}$的下界，从而提出

shc37 $\sum \frac{w_a + r_a}{a} \geqslant 3\sqrt{3}$.

接着再给出几个待证实的比值型不等式：

shc38 (a) $\sum \frac{w_a r_a}{bc} \geqslant \frac{9}{4}$; $\{\Delta_a\}$

(b) $\sum \frac{w_a r_a}{b^2 + c^2} \leqslant \frac{9}{8}$;

(c) $\sum \left(\frac{w_a + r_a}{b + c}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4}$;

(d) $\sum \sqrt{\frac{w_a r_a}{bc}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

[4,p.92]给出了不等式：

$$\sum \left(\frac{r_a}{w_a}\right)^k \geqslant 3 (\text{其中 } k > 0).$$

当 $k<0$ 时，不等式是否还成立呢？计算机的计算表明 $k = -\frac{1}{4}$时成立，即有

$$\sum \left(\frac{w_a}{r_a}\right)^{\frac{1}{4}} \geqslant 3.$$

但 $k = -\frac{1}{10}$时不成立. 一个自然的问题是

shc39 求使$\sum \left(\frac{w_a}{r_a}\right)^k \geqslant 3$ 成立的最小正数 k.

类似于上的一个问题如下：

shc40 求使$\sum \left(\frac{r_a}{w_b + w_c}\right)^k \geqslant \frac{3}{2^k}$成立的最小正数 k.

在这一节的最后，介绍涉及 $w_a, w_b, w_c, r_a, r_b, r_c$ 与边长的几个

不等式：

shc41 (a) $\sum a(w_a+r_a)\geqslant\sqrt{3}\sum bc$；

(b) $\sum a(w_a^2+r_a^2)\geqslant\frac{4}{3}s^3$；

(c) $\sum aw_ar_a\leqslant\frac{2}{3}s^3$.

6. 有关 r_a,r_b,r_c 与 m_a,m_b,m_c 的不等式问题

首先给出类似于 shc36 提到的不等式：

shc42 (a) $\sum\frac{1}{r_a+m_a}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2s}$； $\{\Delta_a\}$

(b) $\sum\frac{1}{r_a+m_a}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\sum\frac{1}{a}$；

(c) $\sum\frac{1}{r_a^2+m_a^2}\leqslant\frac{1}{3Rr}$；

(d) $\sum\frac{1}{(r_a+m_a)^2}\leqslant\frac{1}{6Rr}$. $\{\Delta_a\}$

1991 年，杨任尔证明了不等式

$$\sum\frac{r_a}{m_a}\geqslant 3.$$

其后，单墫得出了更好的结果[1]：

$$\sum\frac{r_br_c}{m_bm_c}\geqslant 3.$$

注意到 $$\sum\sin^2\frac{A}{2}\geqslant\frac{3}{4},$$

我们猜想以上两个不等式还可分别加强如下：

shc43 (a) $\sum\frac{r_a}{m_a}\geqslant 4\sum\sin^2\frac{A}{2}$；

(b) $\sum\frac{r_br_c}{m_bm_c}\geqslant 4\sum\sin^2\frac{A}{2}$.

应用计算机考察 $\sum\sqrt{\frac{r_br_c}{m_bm_c}}$ 的下界后，我们提出

shc44 $\sum\sqrt{\frac{r_b r_c}{m_b m_c}}>2.$

下面,介绍有关锐角三角形的一个有趣的猜想:

shc45 当 $0<k\leqslant 8$ 时,有

$$\sum\frac{m_a^k-r_a^k}{a^k}\geqslant 0. \qquad \{\Delta_a\}$$

在接下去的两个猜想中,给出涉及 r_a,r_b,r_c,m_a,m_b,m_c 与边长的一些不等式.

shc46 (a) $\sum a(r_a+m_a)\geqslant\frac{4}{\sqrt{3}}s^2$;

(b) $\sum(b+c)(r_a+m_a)^2\geqslant\frac{16}{3}s^3$;

(c) $\sum(b+c)r_a m_a\leqslant\frac{4}{3}s^3$; $\{\Delta_a\}$

(d) $\sum bc(r_a+m_a)\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{9}s^3.$ $\{\Delta_a\}$

shc47 (a) $\sum\frac{(r_a+m_a)^2}{b^2+c^2}\geqslant\frac{9}{2}$;

(b) $\sum\frac{r_a m_a}{(b+c)^2}\geqslant\frac{9}{16}.$ $\{\Delta_a\}$

接下来,给出类似于 shc35(a)的一个猜想:

shc48 当 $k\geqslant\frac{8}{5}$ 或 $k<0$ 时,有

$$\sum\frac{r_a^k}{m_b^k+m_c^k}\geqslant\frac{3}{2}.$$

最近,本文作者证明了,当 $k<0$ 时对任意$\triangle ABC$ 有

$$\sum\frac{m_a^k}{r_b^k+r_c^k}\leqslant\frac{3}{2}.$$

现对锐角三角形提出

shc49 当 $k>1$ 时,有

$$\sum\frac{m_a^k}{r_b^k+r_c^k}\leqslant\frac{3}{2}.\qquad(\Delta_a)$$

7. 其他不等式问题

大家知道，三角形三条中线的和与半周长之间有不等式关系：

$$\sum m_a>\frac{3}{2}s.$$

能否在此不等式的右边加上一个正的几何量，使之成为非严格的不等式呢？经考察，我们提出

shc50 $\sum m_a\geqslant\frac{3}{2}s+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sum h_a.$

类似于上的一个猜测是

shc51 $\sum w_a\leqslant\frac{4}{3}s+\left(1-\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)\sum h_a.$

在以下 shc52-shc54 中，我们给出含有三角函数的几个猜想不等式.

shc52 $\sum w_a\cos A\geqslant\frac{1}{2}\sum m_a.$

shc53 $\sum(m_b+m_c)\sin\frac{A}{2}\geqslant\sum w_a.$

shc54 (a) $\sum(m_b+m_c)\cos(B-C)\leqslant2\sum h_a;$

(b) $\sum(m_b+m_c)\cos\frac{B-C}{2}\geqslant2\sum h_a.$

1993 年 8 月，笔者考察了三个和式 $\sum h_a,\sum m_a,\sum w_a$ 之间的不等式关系，作出猜测：

shc55 $\sum h_a+8\sum m_a\geqslant9\sum w_a.$

注：上式中的系数很可能是最优的.

接下去给出一个有关 m_a,w_a,r_a 与边长的混合型不等式：

shc56 $\sum w_a(m_a+r_a)\leqslant2s^2.$

事实上，作者应用计算机还发现了许多类似于上的混合型不

等式，在以下 shc57-shc65 中，我们再介绍一些此类不等式.

shc57 $\sum r_a(m_a+w_a)\leqslant 2s^2$. $\{\Delta_a\}$

shc58 $\sum m_a(r_a+w_a)\leqslant 2s^2$. $\{\Delta_a\}$

shc59 $\sum m_a(r_a^2+w_a^2)\geqslant\frac{2}{\sqrt{3}}s^3$.

shc60 $\sum r_a(w_a^2+h_a^2)\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}abc$.

shc61 $\sum w_a(r_a^2+h_a^2)\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}abc$.

shc62 (a) $\sum m_a(w_a+r_a)^2\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}abc$;

(b) $\sum m_a(w_a+r_a)^2\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}s^3$. $\{\Delta_a\}$

shc63 $\sum h_a(w_a^2+r_a^2)\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{4}abc$.

shc64 (a) $\sum w_a(m_a+r_a)^2\geqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}abc$;

(b) $\sum w_a(m_a+r_a)^2\leqslant\frac{4}{\sqrt{3}}s^3$. $\{\Delta_a\}$

shc65 $\sum r_a m_a w_a\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{8}abc$.

下面给出有关高线与中线的一个比值型猜想不等式：

shc66 $\sum\frac{h_a}{m_b+m_c}\leqslant\frac{3}{2}$.

最近，作者证得了混合型不等式：

$$\sum\frac{m_a}{r_a+w_a}\geqslant\frac{3}{2},$$

此类不等式很少见有文献论及. 在以下 shc67 与 shc68 中，我们提出几个看来不易证明的这类不等式：

shc67 (a) $\sum \frac{w_a}{\sqrt{m_a r_a}} \geqslant 3$;

(b) $\sum \frac{m_a + h_a}{m_a + r_a} \leqslant 3$;

(c) $\sum \frac{m_a + h_a}{\sqrt{m_a r_a}} \geqslant 6$;

(d) $\sum \frac{h_a}{r_a} \geqslant \sum \frac{m_a}{w_a}$; $\{\Delta_a\}$

(e) $\sum \frac{r_a}{w_a} \geqslant \sum \frac{w_a}{h_a}$.

shc68 (a) $\sum \frac{w_b + w_c}{\sqrt{m_a r_a}} \leqslant 6$; $\{\Delta_a\}$

(b) $\sum \frac{(w_b + w_c)^2}{m_a r_a} \leqslant 12$; $\{\Delta_a\}$

(c) $\sum \frac{w_b^2 + w_c^2}{m_a^2 + r_a^2} \leqslant 3$. $\{\Delta_a\}$

接下来,给出有关 $m_a, m_b, m_c; h_a, h_b, h_c$ 与 r_a, r_b, r_c 的一个含指数变量的猜想:

shc69 当 $0 < k \leqslant 10$ 时,有

$$\sum \frac{h_a^k}{m_a^k + r_a^k} \leqslant \frac{3}{2}.$$

最后,我们提出有关旁切圆半径与边长的一个不等式:

shc70 当 $k \geqslant \frac{1}{4}$ 时,有

$$\sum \frac{r_a^k}{b^k + c^k} \geqslant \frac{3^{k/2+1}}{2^{k+1}}.$$

注:已证 $k=1$ 时成立.

§2 关于三角形内部或平面上任一点的不等式问题

符号约定如下：设 P 为$\triangle ABC$ 内部或平面上任一点，这点至边 BC，CA，AB 的距离分别为 PD，PE，PF. 记 $PD=r_1$，$PE=r_2$，$PF=r_3$；$PA=R_1$，$PB=R_2$，$PC=R_3$. $\triangle DEF$ 的外接圆半径与面积分别为 R_p，Δ_p. 另设$\triangle BPC$，$\triangle CPA$，$\triangle APB$ 的外接圆半径分别为 R_a，R_b，R_c. 当 P 位于$\triangle ABC$ 内部时，设 AP，BP，CP 分别交 BC，CA，AB 于 L，M，N，且记 $PL=r_1'$，$PM=r_2'$，$PN=r_3'$，$AL=l_a$，$BM=l_b$，$CN=l_c$；$\triangle LMN$ 的边 MN，NL，LM 分别设为 q_a，q_b，q_c，其面积为 Δ_q.

另外，在以下 shc71-shc100 中，猜想 shc74-shc80 中的 P 点是指$\triangle ABC$ 平面上的任一点，其余猜想中的 P 点均指$\triangle ABC$ 内部任一点.

1. 有关 r_1，r_2，r_3 与 R_1，R_2，R_3 的不等式问题

1992 年，笔者[9]建立了不等式：

$$\sum r_1^k \geqslant 2r^k+(2R\Delta_P/\Delta)^k（其中|k|\geqslant 1），$$

并猜想它对 $0<k<1$ 也成立. 这一猜想为匡继昌在[10]附录的 100 个未解决问题提及. 现已知上述猜想是不正确的. 这里重新提出有关的猜想：

shc71 当 $-1<k<0$ 时，有

$$\sum r_1^k \geqslant 2r^k+\left(\frac{2R\Delta_P}{\Delta}\right)^k.$$

我们在[9]中作出的猜想 2 与猜想 3 一直未见有人解决，在此，重新介绍与[9]中猜想 2 相等价的一个猜想：

shc72 当$0<k\leqslant 1$ 时，有

$$\sum R_1^k \leqslant 2R^k+(2R_P)^k.$$

应用 Cauchy 不等式与简单的不等式 $m_a m_b m_c \geqslant r_a r_b r_c$，易证

$$\sum \frac{m_a}{r_2 + r_3} \geqslant \frac{9}{2}.$$

现猜想此式还可进一步加强如下：

shc73 $\sum \frac{h_a}{r_2 + r_3} \geqslant \frac{9}{2}$.

注：利用重心坐标不难说明(参见[11])，上面的几何不等式等价于涉及六个正数 x, y, z, u, v, w 的代数不等式：

$$2\sum \frac{1}{(y+z)(v+w)} \geqslant \frac{9}{\sum x(v+w)}.$$

已经知道，当 $x=u, y=v, z=w$ 时上式成立，参见[12]、[13].

采用[14]中推论 7 的证法可以证得

$$\sum \frac{R_1}{h_b + h_c} \geqslant 1.$$

经考察，猜想成立以下更强的不等式：

shc74 $\sum \frac{R_1}{w_b + w_c} \geqslant 1$.

下面给出一对涉及 R_1, R_2, R_3 与中线的一对不等式：

shc75 (a) $\sum \frac{R_1}{(m_b + m_c)\sin A} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$;

(b) $\sum \frac{R_1}{m_a \sin A} \geqslant \frac{4}{\sqrt{3}}$.

考虑[14]中不等式 $\sum \sqrt{bc} R_1 \geqslant 4\Delta$ 的加强，笔者提出

shc76 $\sum \frac{bc}{b+c} R_1 \geqslant 3\sqrt{3} Rr$.

关于中线 m_a, m_b, m_c 与 R_1, R_2, R_3，已知成立以下很强的不等式：

$$\sum m_a R_1 \geqslant \frac{1}{2} \sum a^2.$$

这是[5,p. 298]定理 A 的特例。类似的一个问题是：和式 $\sum w_a R_1$ 的下界是什么呢？经考察提出

shc77 $\sum w_a R_1 \geqslant 9Rr.$

另外，我们提出有关和式 $\sum (r_b + r_c) R_1$ 的以下猜想：

shc78 $\sum (r_b + r_c) R_1 \geqslant \frac{4}{3} s^2.$

用 R 与 r 可以给出 $\sum R_2 R_3$ 的下界[31]：

$$\sum R_2 R_3 > 4Rr.$$

此不等式启示笔者考虑了 $\sum (R_2 + R_3)^2$ 与 Rr 间的不等式关系，从而提出

shc79 $\sum (R_2 + R_3)^2 \geqslant 24Rr.$

上式又促使我们考察了 $\prod (R_2 + R_3)$ 的下界，并作出猜测：

shc80 $\prod (R_2 + R_3) \geqslant \frac{64}{27} \prod w_a.$

1992 年，作者证明了严格不等式：$\sum r_1 R_1 < 2R^2$. 后发现它很可能还可改进为

$$\sum r_1 R_1 \leqslant \frac{3}{2} R^2.$$

同时发现类似的不等式

$$\sum r_1 R_1 \leqslant \frac{3}{2} R^3$$

也极可能成立. 但一直未找到上述两个不等式的证明，因此提出

shc81 (a) $\sum r_1 R_1 \leqslant \frac{3}{2} R^2$;

(b) $\sum r_1 R_1^2 \leqslant \frac{3}{2} R^3.$

以下给出一对看上去有点古怪的不等式：

shc82 (a) $\sum \frac{R_1}{r_1+w_a} \geqslant \frac{3}{2}$;

(b) $\sum \frac{R_1}{r_1+r_a} \geqslant \frac{3}{2}$.

1992年，作者在文[9]中指出不等式

$\sum R_2R_3 < 5R^2$ 成立. 其后不久，陈计[15]改进了它. 这里，我们针对上述不等式给出联系 r_1, r_2, r_3 的一个加强式：

shc83 $\frac{8}{3}\sum r_2r_3 + \sum R_2R_3 \leqslant 5R^2$.

2. 有关 r_1', r_2', r_3' 与 R_a, R_b, R_c 的不等式问题

首先提出关于 r_1', r_2', r_3' 与 R 的一个问题：

shc84 求使 $\sum r_1'^k \leqslant 3\left(\frac{R}{2}\right)^k$ 成立的最大 k 值.

最近，陈计[16]猜想成立：

$$\sum r_2'r_3' \leqslant \frac{1}{4}\max\{a^2, b^2, c^2\}.$$

据悉，这个猜想已被人证出. 下面介绍陈计作出的另一个有关 r_1', r_2', r_3' 与边长的猜测：

shc85 $\prod r_1' \leqslant \frac{1}{72\sqrt{3}}\sum a^3$.

以下给出一个比值型的猜想不等式：

shc86 $\sum \frac{a}{r_1'} \geqslant 6\sqrt{3}$.

再介绍几个类似的有关旁切圆半径与中线的不等式：

shc87 (a) $\sum \frac{r_a}{r_1'} \geqslant 9$;

(b) $\sum \frac{r_a}{r_2'+r_3'} > 2$;

(c) $\sum \frac{m_b+m_c}{r_1'} \geqslant 18$;

(d) $\sum \frac{m_a + r_a}{r_1'} \geqslant 18$.

注：猜想(c)、(d)属于刘毅.

接下来，我们给出形式上类似于著名的 Erdös-Mordell 不等式 $\sum R_1 \geqslant 2\sum r_1$ 的一个猜想不等式：

shc88 $\sum R_a \geqslant 2\sum r_1'$.

此外，猜想 $\sum R_b R_c$ 与 $\sum r_2' r_3'$ 有以下关系：

shc89 $\sum R_b R_c \geqslant 4\sum r_2' r_3'$.

A. Oppenheim 曾建立不等式 $\prod R_1 \geqslant \prod (r_2 + r_3)$（参见[4]），类比此式，经考察提出

shc90 $\prod R_a \geqslant \prod (r_2' + r_3')$.

这一节的最后给出有关 R_a, R_b, R_c 与 r_1', r_2', r_3' 的一对比值型不等式：

shc91 (a) $\sum \frac{r_1'}{R_b + R_c} \leqslant \frac{3}{4}$；

(b) $\sum \sqrt{\frac{r_2' + r_3'}{R_b + R_c}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{2}}$.

3. 其它不等式问题

首先介绍涉及 R_a, R_b, R_c 与 a, b, c 的一个猜想：

shc92 $\sum \frac{R_a}{b + c} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

最近，本文作者发现并证明了以下一个有趣的不等式：

$$\sum \frac{R_1}{w_a + r_a} \geqslant 1.$$

这一结果又启发我们提出下面类似的一个不等式：

shc93 $\sum \frac{R_a}{m_a + w_a} \geqslant 1$.

在以下 shc94-shc96 中，给出应用计算机直接搜索出来的三对比值型不等式：

shc94 (a) $\sum \frac{w_a}{R_b+R_c} \leqslant \frac{9}{4}$;

(b) $\sum \frac{w_b+w_c}{R_b+R_c} \leqslant \frac{9}{2}$.

shc95 (a) $\sum \frac{R_a}{r_1+m_a} \geqslant \frac{3}{2}$;

(b) $\sum \frac{R_a}{r_1+r_a} \geqslant \frac{3}{2}$.

shc96 (a) $\sum \frac{r_1}{R_b+R_c} \leqslant \frac{3}{4}$;

(b) $\sum \frac{r_2+r_3}{R_b+R_c} \leqslant \frac{3}{2}$.

将有关三角形常见几何元素的不等式推广为涉及一动点的情形，是一件有意义的工作. 笔者在提出前面的 shc66 后考虑它的这种推广，进而作出猜测：

shc97 $\sum \frac{r_1}{l_b+l_c} \leqslant \frac{1}{2}$.

注：令 P 为$\triangle ABC$ 的重心，由上式立得 shc66 提及的不等式.

现在，给出有关 R_a, R_b, R_c 与 l_a, l_b, l_c 的三个猜想不等式：

shc98 (a) $\prod R_a \geqslant \frac{1}{27} \prod (l_b+l_c)$;

(b) $\sum R_b R_c \geqslant \frac{4}{9} \sum l_b l_c$;

(c) $(\sum R_a)^2 \geqslant \frac{4}{3} \sum l_a^2$.

注：笔者已证较(a)稍弱的不等式：

$$\prod R_a \geqslant \frac{8}{27} \prod l_a$$

成立.

下面介绍刘毅发现的两个尚待证实的不等式：

shc99 (a) $\sum aq_a \geqslant 8\sqrt{3}\Delta_q$;

(b) $\sum (b+c)q_a \geqslant 16\sqrt{3}\Delta_q$.

最后,提出有关△LMN 的边长与 R_a,R_b,R_c 的两个不等式:

shc100 (a) $\prod R_a \geqslant \frac{8\sqrt{3}}{9}\prod q_a$;

(b) $\sum R_a \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sum q_a$.

致谢:本文的工作得到中科院遥感应用研究所工程师刘毅的大力帮助,特致谢意!同时感谢宁波大学数学系陈计副教授的热心支持!

参考文献

[1]D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec and Chen Ji, Addenda to the Monograph "Recent Advances in Geometric Inequalities"(Ⅰ), Journal of Ningbo University, Vol. 4, No. 2, 12(1991), 79—145.

[2]杨之编著,初等数学研究的问题与课题,湖南教育出版社,1993 年 5 月第 1 版.

[3]刘健,二个新的三角形不等式,教学月刊,8(1993),1—4.

[4]O. Bottema 等著,单墫译,几何不等式,北京大学出版社,1991 年 9 月.

[5]D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and V. Volenec, Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, 1989.

[6]杨学枝,关于角平分线的几个不等式,数学通讯,5(1994),24—26.

[7]王振、陈计,两个猜想不等式的加强及其它,中学教研(数学),7—8(1994),51—53.

[8]李炯生、黄国勋主编,中国初等数学研究(1978—1988),科学技术文献出版社,1992 年 2 月.

[9]刘健,几个新的三角形不等式,数学竞赛(15),湖南教育出版社,1992 年 10 月,80—100.

[10]匡继昌,常用不等式,湖南教育出版社,1993 年 5 月第 2 版.

[11]刘健，一类三角形不等式的等价定理及其应用，中学数学(江苏)，11(1994)，8－11.
[12]陈计，数学竞赛问题75解答，数学通讯，3(1994)，34.
[13]刘健，从两个几何不等式谈起，中学数学(江苏)，8(1994)，12—14.
[14]刘健，Bottema不等式的推广及应用，福建中学数学，1(1994)，8－10.
[15]陈计，问题55评注，数学通讯，6(1993)，41.
[16]陈计，问题137*，数学通讯，7(1991)，38.

关于四面体的两个不等式

王 庚

安徽机电学院基础部(芜湖,241000)

对于欧氏平面上的三角形 $A_1A_2A_3$,设三边分别为 a_1、a_2、a_3,1916 年彼得洛维奇得到不等式:

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{(a_1+a_2+a_3)^2}\leqslant\frac{1}{2}. \tag{1}$$

1961 年达林和莫泽得到不等式

$$\frac{4(9-2d)}{27}S_0^2\leqslant a_1^2+a_2^2+a_3^2-d\frac{a_1a_2a_3}{S_0}\leqslant 2S_0^2. \tag{2}$$

式中 $S_0=\frac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)$,$d$ 为任一非负实数.[1]

以下应用优超理论[2]对不等式(1)、(2)在空间作推广.

引理 1 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长为 $a_1,a_2,\cdots,a_6$,则有

$$\left(\frac{3S}{6},\frac{3S}{6},\cdots,\frac{3S}{6}\right)\prec(a_1,a_2,\cdots,a_6)\prec(S,S,S,0,0,0). \tag{3}$$

式中 $S=\frac{1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_6)$,“$\prec$”为 n 维向量间的优超关系.

证明 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_6$,因为

$$\frac{3S}{6}=\frac{1}{6}(a_1+a_2+\cdots+a_6)\leqslant\frac{6a_1}{6}=a_1,$$

又 $\frac{3S}{6}+\frac{3S}{6}=\frac{2}{6}(a_1+a_2+\cdots+a_6)$

$$=\frac{1}{6}[(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_5)+(a_1+a_2+a_4+\cdots+a_6)]$$

$$\leqslant\frac{6(a_1+a_2)}{6}=(a_1+a_2),$$

同理可证

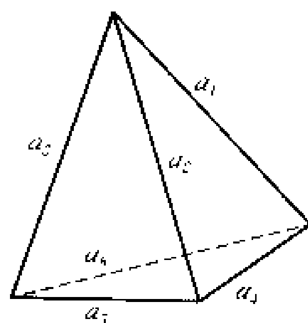
$$i\left(\frac{3S}{6}\right)\leqslant\sum_{j=1}^{i}a_j\qquad(i=3,4,5).$$

且

$$\underbrace{\frac{3S}{6}+\cdots+\frac{3S}{6}}_{6}=6\cdot\frac{3S}{6}=3S=(a_1+a_2+\cdots+a_6),$$

故

$$\underbrace{\left(\frac{3S}{6},\cdots,\frac{3S}{6}\right)}_{6}\prec(a_1,\cdots,a_6)$$



又不妨设四面体如图所示，由三角形两边之和大于第三边，故有

$$\frac{1}{3}(a_1+a_2+\cdots+a_6)-a_1$$

$$=\frac{1}{3}[(a_3+a_6-a_1)+(a_2+a_4-a_1)+a_5]>0.$$

即有

$$S>a_1.$$

同理可证

$$S-a_k>0\quad(k=2,3,\cdots,6).$$

即 $S>a_k(k=2,\cdots,6)$.

于是

$S+S>a_1+a_2,$

$S+S+S>a_1+a_2+a_3,$

$S+S+S=3S=(a_1+a_2+\cdots+a_6)>a_1+\cdots+a_4,$

$S+S+S>a_1+\cdots+a_5$,

且 $S+S+S=a_1+a_2+\cdots+a_6$,故

$(a_1,a_2,\cdots,a_6)\prec(S,S,S,0,0,0)$.

证毕.

引理 2[1] (舒尔—奥斯特洛夫斯基定理) 设 I 是实轴 R 上的开区间,$F(z)$ 是 I^n 上连续可微函数,则 $F(z)$ 在 I^n 上是舒尔凸的充要条件为:对所有 $i\neq j$,

$$(z_i-z_j)\left(\frac{\partial F}{\partial z_i}-\frac{\partial F}{\partial z_j}\right)\geqslant 0,$$

式中 $F(z)=F(z_1,\cdots,z_n),(z_1,\cdots,z_n)\in I^n$.

注:设 $\mathscr{A}$ 是 R^n 中的一个集合,$F(z)$ 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的一实函数,如果对任意 $x,y\in\mathscr{A}$,当 $x\prec y$ 时,恒有 $F(x)\leqslant F(y)$. 则称 $F(z)$ 为舒尔(Schur)凸的.

定理 设空间任意四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的棱长分别为 $a_i(i=1,2,\cdots,6)$,d 为任意一非负实数,则有

$$\frac{1}{6}\leqslant\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_6^2}{(a_1+a_2+\cdots+a_6)^2}\leqslant\frac{1}{3};\tag{4}$$

$$\frac{3}{2}\left[1-\frac{d}{96}S^3\right]S^2\leqslant a_1^2+\cdots+a_6^2-d\,\frac{a_1a_2\cdots a_6}{S}\leqslant 3S^2.\tag{5}$$

式中 $S=\frac{1}{3}(a_1+\cdots+a_6)$.

证明 记 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_6)$,且

$$F_1(z)=\frac{z_1^2+\cdots+z_6^2}{(z_1+\cdots+z_6)^2}$$

和

$$F_2(z)=z_1^2+\cdots+z_6^2-3d\,\frac{z_1z_2\cdots z_6}{z_1+\cdots+z_6},$$

显然 $F_1(z)$、$F_2(z)$ 在三维欧氏空间 R^3 中区域 $R_+{}^3$ 上为连续可微函数,而

$$\frac{\partial F_1}{\partial z_i}=\frac{2z_i}{(z_1+\cdots+z_6)^2}-2\,\frac{z_1^2+\cdots+z_6^2}{(z_1+\cdots+z_6)^3},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z_i}=2z_i-3d\left[\frac{\prod\limits_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{6} z_j}{(z_1+\cdots+z_6)}-\frac{z_1\cdot z_2\cdots z_6}{(z_1+\cdots+z_6)^2}\right]\quad (i=1,2,\cdots 6).$$

且

$$(z_i-z_j)\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_i}-\frac{\partial F_1}{\partial z_j}\right)=\frac{2(z_i-z_j)^2}{(z_1+\cdots+z_6)^2}\geqslant 0,$$

$$\begin{aligned}&(z_i-z_j)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z_i}-\frac{\partial F_2}{\partial z_j}\right)\\&=(z_i-z_j)\left[2(z_i-z_j)-3d\,\frac{\left(\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{6} z_k-\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{6} z_k\right)}{(z_1+\cdots+z_6)}\right]\\&=(z_i-z_j)^2\left[2+3d\,\frac{\prod\limits_{k=1,k\neq i,k\neq j}^{6} z_k}{z_1+\cdots+z_6}\right]\geqslant 0.\end{aligned}$$

由引理 2 知，$F_1(z)$、$F_2(z)$在 R_+^6 上是舒尔凸的.

又由引理 1 中式(3)，便有

$$F_i\left(\frac{3}{6}S,\cdots,\frac{3}{6}S\right)\leqslant F_i(a_1,\cdots,a_6)\leqslant F_i(S,S,S,0,0,0)$$

$(i=1,2)$. (6)

由于

$$F_1\left(\frac{3}{6}S,\cdots,\frac{3}{6}S\right)=\frac{6\left(\frac{3S}{6}\right)^2}{\left(6\,\frac{3S}{6}\right)^2}=\frac{1}{6},$$

$$F_1(S,S,S,0,0,0)=\frac{3S^2}{(3S)^2}=\frac{1}{3}.$$

故不等式(4)成立.

又

$$F_2\left(\frac{3}{6}S,\cdots,\frac{3}{6}S\right)=6\left(\frac{3S}{6}\right)^2-3d\left(\frac{3S}{6}\right)^6\Big/6\,\frac{3S}{6}$$

$$=\frac{3}{2}\left[1-\frac{d}{96}S^4\right]S^2,$$

$$F_2(S,S,S,0,0,0)=3S^2-0=3S^2,$$

故不等式(5)成立.

证毕.

参考文献

[1]肖贻兴、李炯生,优超理论在几何不等式的应用,数学通报,8(1992),38—42.

[2]A. W. Marshall, I. Olkin, Inequalities: Theory of Majorizatiou and Its Applications,美国科学出版社,1979年版.

四面体中线的两个不等式

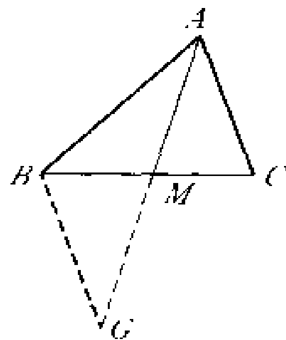
胡耀宗　赵有为

湖南益阳师专(413049)

文[1]定义了:连接四面体的一个顶点和这个顶点所对的面(每个面都是三角形)的重心的线段称为这四面体过这个顶点的一条中线. 文[1]并且证明了:四面体的四条中线共点,且这点把四面体的每一条中线都分成3∶1的两段.

本文介绍四面体中线的两个有趣的不等式.

引理　三角形的一中线的2倍小于夹此中线两边之和.



证明　设AM是$\triangle ABC$的一条中线,延长AM到G,使$MG=AM$,连接BG,则$\triangle BMG\cong\triangle CMA$,从而$BG=AC$.

在$\triangle ABG$中,有

$AG<AB+BG$,

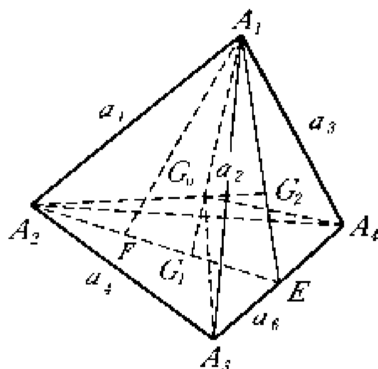
即　$2AM<AB+AC$.

下面介绍四面体中线的两个定理.

定理1　四面体的一中线小于夹此中线的三条棱长和的$\frac{1}{3}$.

证明　设四面体$A_1A_2A_3A_4$的顶点A_1所对的面的重心为G_1

$(i=1,2,3,4)$. 连接 A_2G_1, A_2G_1 交 A_3A_4 于 E, E 为 A_3A_4 中点. 取 A_2G_1 中点 F, 连接 A_1E、A_1F. 因 G_1 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心, $A_2G_1=2G_1E$, 故 A_1G_1、A_1F 分别为 $\triangle A_1EF$ 与 $\triangle A_1A_2G_1$ 的中线. 由引理, 知



$$2A_1G_1<A_1E+A_1F, \quad ①$$

$$2A_1F<A_1A_2+A_1G_1. \quad ②$$

①×2, 得

$$4A_1G_1<2A_1E+2A_1F. \quad ③$$

由②与③, 知

$$4A_1G_1<2A_1E+A_1A_2+A_1G_1.$$

$$\therefore 3A_1G_1<2A_1E+A_1A_2. \quad ④$$

又 A_1E 是 $\triangle A_1A_3A_4$ 的中线.

由引理, 得

$$2A_1E<A_1A_3+A_1A_4. \quad ⑤$$

再由④与⑤, 得

$$3A_1G_1<A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4.$$

即
$$A_1G_1<\frac{1}{3}(A_1A_2+A_1A_3+A_1A_4).$$

定理 2 四面体四中线之和大于六棱和的 $\frac{4}{9}$, 小于六棱和的 $\frac{2}{3}$.

证明 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的六棱长分别为 $A_1A_2=a_1$, $A_1A_3=a_2$, $A_1A_4=a_3$, $A_2A_3=a_4$, $A_2A_4=a_5$, $A_3A_4=a_6$. 由定理 1, 知

$$A_1G_1<\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3).$$

同理

$$A_2G_2<\frac{1}{3}(a_1+a_4+a_5), A_3G_3<\frac{1}{3}(a_2+a_4+a_6),$$

$$A_4G_4 < \frac{1}{3}(a_3 + a_5 + a_6).$$

四式相加,得

$$\sum_{i=1}^{4} A_iG_i < \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{6} a_i.$$

设四面体的重心为 G_0,由文[1],知

$$A_1G_0 : G_0G_1 = 3 : 1.$$

$$\therefore A_1G_0 = \frac{3}{4}A_1G_1.$$

同理 $A_2G_0 = \frac{3}{4}A_2G_2.$

在$\triangle A_1A_2G_0$中,$A_1A_2 < A_1G_0 + A_2G_0$,即

$$A_1A_2 < \frac{3}{4}(A_1G_1 + A_2G_2).$$

即 $a_1 < \frac{3}{4}(A_1G_1 + A_2G_2).$

仿此有

$$a_2 < \frac{3}{4}(A_1G_1 + A_3G_3),$$

$$a_3 < \frac{3}{4}(A_1G_1 + A_4G_4),$$

$$a_4 < \frac{3}{4}(A_2G_2 + A_3G_3),$$

$$a_5 < \frac{3}{4}(A_2G_2 + A_4G_4),$$

$$a_6 < \frac{3}{4}(A_3G_3 + A_4G_4).$$

以上六式相加,得$\sum_{i=1}^{6} a_i < \frac{9}{4}\sum_{i=1}^{4} A_iG_i.$

$$\therefore \frac{4}{9}\sum_{i=1}^{6} a_i < \sum_{i=1}^{4} A_iG_i.$$

综上有 $\frac{4}{9}\sum_{i=1}^{6}a_i<\sum_{i=1}^{4}A_iG_i<\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{6}a_i.$

定理证毕.

注:本文结论不难推广到 n 维单形的情形.

参考文献

[1]苗国,四面体的五"心",数学通报,1993年第9期.

关于四面体的一个命题及其证明

胡安礼

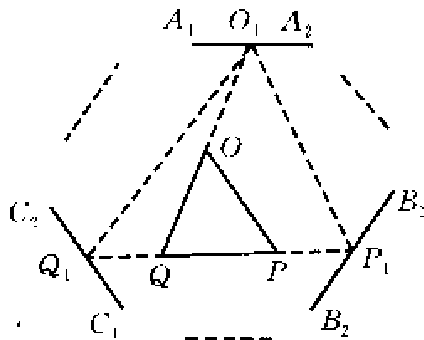
安徽芜湖市第十二中学(241000)

据文[1],有关四面体的问题[2]:

设四面体的各棱长之和为 E,它内部的一个四面体的各棱长之和为 E',求证:$E'\leqslant\frac{4}{3}E$.

尚未解决.本文试图给出它的一种证法.

引理1 若 P_1、P_2 是过△OPQ 顶点 P 的任一直线上位于点 P 两旁的点,则△OP_1Q、△OP_2Q 的周长至少有一个大于△OPQ 周长.



证明 以 O、Q 为焦点,$(PO+PQ)$长为长轴过 P 作椭圆,再以直线 OQ 为轴将此椭圆旋转得旋转椭球面.因 P_1、P_2 是过 P 的直线上且位于点 P 两旁的点,故 P_1、P_2 至少有一点在此椭球外部,不妨设为 P_1,那么显然有△OP_1Q 周长大于△OPQ 周长.证毕.

引理2 若△OPQ 在平面凸 n 边形内,则在此 n 边形的 n 个顶点中至少存在三个点,以这三点为顶点的三角形周长不小于

$\triangle OPQ$ 周长.

证明 设直线 PQ 交 n 边形的 B_1B_2 边于 P_1，交 C_1C_2 边于 Q_1，延长 QO 交 A_1A_2 边于 O_1. 由引理 1，得

$$\triangle O_1P_1Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_1P_1Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_1B_1Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_1B_1C_1\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_1B_1C_2\text{ 周长}\end{array}\right.\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_1B_2Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_1B_2C_1\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_1B_2C_2\text{ 周长}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_2P_1Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_2B_1Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_2B_1C_1\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_2B_1C_2\text{ 周长}\end{array}\right.\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_2B_2Q_1\text{ 周长}<\left\{\begin{array}{l}\triangle A_2B_2C_1\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle A_2B_2C_2\text{ 周长}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

而 $\triangle OPQ$ 周长显然小于 $\triangle O_1P_1Q_1$ 周长（当 O、P、Q 与多边形顶点重合时可取等号）. 证毕.

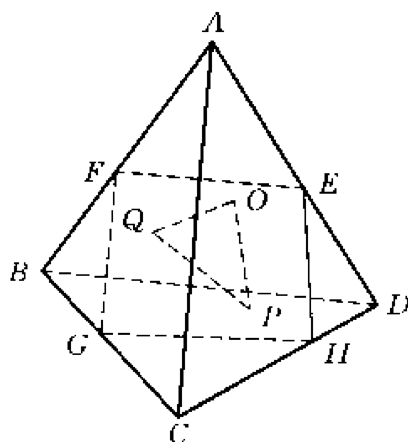
引理 3 四面体内任一三角形的周长不大于该四面体某一侧面三角形周长.

证明 设 $\triangle OPQ$ 为四面体 $ABCD$ 内任一三角形，过 $\triangle OPQ$ 作四面体截面，则只有如下两种可能：

(1) 截面为三角形，不妨记为 $\triangle EFG$. 显然，$\triangle OPQ$ 周长不大于 $\triangle EFG$ 周长，又由引理 1，知

$$
\triangle EFG\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle AEF\text{ 周长}<\triangle ABD\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle CEF\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle ACE\text{ 周长}<\triangle ACD\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle BCE\text{ 周长}<\begin{cases}\triangle ABC\text{ 周长}\\ \quad\text{或}\\ \triangle BCD\text{ 周长}\end{cases}\end{cases}\end{cases}
$$

(2)截面为四边形，设为四边形$EFGH$. 由引理2知，$\triangle OPQ$周长不大于以E、F、G、H中某三点为顶点的三角形周长，不妨设为$\triangle EFG$. 再由引理1得$\triangle EFG$周长小于四面体某一侧面三角形周长.



综合(1)、(2)知，四面体内任一三角形的周长不大于该四面体某一侧面三角形周长(当O、P、Q与四面体顶点重合时可取等号). 证毕.

引理4 四面体任一侧面三角形周长小于各棱长之和的$\frac{2}{3}$.

证明 设四面体$ABCD$各棱长之和为E，不失一般性，记$\triangle BCD$周长为l. 下面用反证法证明$l<\frac{2}{3}E$.

假设$l\geqslant\frac{2}{3}E$，那么$3l\geqslant 2E$，于是由$2(AB+AC+AD)>l$得

$$2(AB+AC+AD)+2l>3l\geqslant 2E,$$

即$2E>2E$矛盾，故$l<\frac{2}{3}E$. 证毕.

最后，我们给出开始提出的那个问题的证明.

设内四面体各侧面三角形周长分别为l_1、l_2、l_3、l_4，那么$2E'=l_1+l_2+l_3+l_4$.

而由引理 3 及引理 4，知

$$l_1+l_2+l_3+l_4<4\times\frac{2}{3}E,$$

故 $2E'<\frac{8}{3}E$，即 $E'<\frac{4}{3}E$（原问题中的等号应除掉）.

参考文献

[1]林祖成，关于四面体中 10 个问题的探讨，中国初等数学研究文集，1992 年 6 月.

[2]杨路，来自四面体的挑战，中学生数学，1987 年 1 月.

四面体棱切球的研究

林祖成　朱火芬

湖北黄石市有色一中(435005)

湖北鄂城通用机器集团公司技校(436000)

大家知道,若称与四面体的六条棱都相切的球为其棱切球,则一般的四面体并不一定存在棱切球. 1985 年,杨之给出了四面体存在棱切球的一个充要条件[1]. 本文先建立棱切球半径的计算公式,然后,建立与半径有关的若干不等式.

1. 半径的计算公式

引理 1[2]　设 n 维单形 $P_0P_1\cdots P_n$ 的体积为 V,棱长 $|P_iP_j|=a_{ij}(a_{ij}=a_{ji},a_{ii}=0,0\leqslant i,j\leqslant n)$,则有

$$V^2=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n!)^2}D(P_0,P_1,\cdots,P_n).$$

其中 $D(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ 为 $n+2$ 阶 Cayley-Mengv 行列式,即

$$D(P_0,P_1,\cdots,P_n)=\begin{vmatrix} 0 & 1\cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & a_{ij}^2 \\ 1 & \end{vmatrix} \tag{2}$$

引理 2[1]　设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的棱长为 $|P_iP_j|=a_{ij}$,则此四面体存在棱切球的充要条件是其棱长满足:

$$a_{ij}=x_i+x_j(i\neq j). \tag{3}$$

定理 1 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的棱长 $|P_iP_j|=a_{ij}$，且存在棱切球，棱切球的半径为 l，则有

$$l^2=-\frac{D_1}{2D_2}. \tag{4}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} -2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 & 2x_0x_3 \\ 2x_0x_1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_0x_2 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 \\ 2x_0x_3 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & \\ 1 & & D_1 & & \\ 1 & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}$$

这里 x_i 的意义由(3)确定.

证明 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的棱切球的球心为 P_4，其棱切球与棱 P_iP_j 的切点为 $M_{ij}(i\neq j)$. 由球的切线长定理，不妨设 $|P_iM_{ij}|=x_i$，从而 $a_{ij}=|P_iP_j|=|P_iM_{ij}|+|P_jM_{ji}|=x_i+x_j$.

又∵ $P_4M_{ij}\perp P_iP_j$， ∴ $|P_4P_i|^2=l^2+x_i^2$.

而由 P_0,P_1,P_2,P_3,P_4 五点为顶点的几何体在四维空间中的体积为零，故依引理 1 知：关于 P_0,P_1,P_2,P_3,P_4 的六阶 Cayley-Mengev 行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_0+x_1)^2 & (x_0+x_2)^2 & (x_0+x_3)^2 & l^2+x_0^2 \\ 1 & (x_0+x_1)^2 & 0 & (x_1+x_2)^2 & (x_1+x_3)^2 & l^2+x_1^2 \\ 1 & (x_0+x_2)^2 & (x_1+x_2)^2 & 0 & (x_2+x_3)^2 & l^2+x_2^2 \\ 1 & (x_0+x_3)^2 & (x_1+x_3)^2 & (x_2+x_3)^2 & 0 & l^2+x_3^2 \\ 1 & l^2+x_0^2 & l^2+x_1^2 & l^2+x_2^2 & l^2+x_3^2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

对此行列式作如下变形：

1)将第一行乘以"$-l^2$"加到第 6 行；

2)将第一列乘以"$-l^2$"加到第 6 列；

3)将第一行乘以"$-x_i^2$"加到第 $i+2$ 行($i=0,1,2,3$)；

4)将第一列乘以"$-x_i^2$"加到第 $i+2$ 列($i=0,1,2,3$)，

从而得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 & 2x_0x_3 & 0 \\ 1 & 2x_0x_1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 0 \\ 1 & 2x_0x_2 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 & 0 \\ 1 & 2x_0x_3 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2l^2 \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式按第 6 列展开，得

$$-\begin{vmatrix} 1 & -2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 & 2x_0x_3 \\ 1 & 2x_0x_1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 1 & 2x_0x_2 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 \\ 1 & 2x_0x_3 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-2l^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2x_0^2 & 2x_0x_1 & 2x_0x_2 & 2x_0x_3 \\ 1 & 2x_0x_1 & -2x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 1 & 2x_0x_2 & 2x_1x_2 & -2x_2^2 & 2x_2x_3 \\ 1 & 2x_0x_3 & 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & -2x_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

将此式左边第一个行列式按第五行展开并移项整理即得(4)，证毕.

推论 在定理 1 的记意义下，有

$$V^2l^2=\left(\frac{2}{3}x_0x_1x_2x_3\right)^2. \tag{5}$$

其中 V 为四面体的体积.

证明 由定理1,知

$$D_1=2^4(x_0x_1x_2x_3)^2\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$$

$$=-2^8(x_0x_1x_2x_3)^2. \tag{6}$$

再对定理1中的 D_2 作如下变形:

1)将第一行乘以 x_i^2 加到第 $i+2$ 行($i=0,1,2,3$);

2)将第一列乘以 x_i^2 加到第 $i+2$ 列($i=0,1,2,3$),从而 D_2 变为:

$$D_2=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&(x_0+x_1)^2&(x_0+x_2)^2&(x_0+x_3)^2\\1&(x_0+x_1)^2&0&(x_1+x_2)^2&(x_1+x_3)^2\\1&(x_0+x_2)^2&(x_1+x_2)^2&0&(x_2+x_3)^2\\1&(x_0+x_3)^2&(x_1+x_3)^2&(x_2+x_3)^2&0\end{vmatrix} \tag{7}$$

由(7)并结合引理1,知

$$D_2=288V^2. \tag{8}$$

由定理1及(6)、(8)知(5)成立.

2. 若干不等式

引理3 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积为 V,外接球的半径为 R,其三组对棱分别为 $a,a_1;b,b_1;c,c_1$;则有

$$V^2R^2=\frac{1}{24^2}(aa_1+bb_1+cc_1)(aa_1+bb_1-cc_1)(aa_1+cc_1-bb_1)\cdot(bb_1+cc_1-aa_1). \tag{9}$$

特款:对于存在棱切球的四面体 $A_1A_2A_3A_4$,有

$$V^2R^2=\frac{1}{24^2}[(x_1+x_2)(x_3+x_0)+(x_2+x_3)(x_1+x_0)$$

$$+(x_1+x_3)(x_2+x_0)][2(x_1x_3+x_2x_0)]$$

$$\cdot[2(x_2x_3+x_1x_0)][2(x_1x_2+x_3x_0)] \tag{10}$$

$$=\frac{1}{36}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_0+x_2x_3+x_2x_0+x_3x_0)$$

$$\cdot(x_1^3x_2x_3x_0+x_2^3x_1x_3x_0+x_3^3x_1x_2x_0+x_0^3x_1x_2x_3$$

$$+x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_0^2+x_1^2x_3^2x_0^2+x_2^2x_3^2x_0^2). \tag{11}$$

(9)是大家熟知的，(10)、(11)可由(9)及(3)经计算直接得到.

引理 4 若四面体的某一个面的三条棱长为 a,b,c，它们之对棱分别为 x,y,z，则其体积 V 为

$$V=\frac{1}{12}(P_1+P_2+P_3-H)^{1/2}. \tag{12}$$

其中：

$$P_1=(ax)^2(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2),$$

$$P_2=(by)^2(a^2+c^2+x^2+z^2-b^2-y^2),$$

$$P_3=(cz)^2(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2),$$

$$H=(abc)^2+(ayz)^2+(bzx)^2+(cxy)^2.$$

特款：对于存在棱切球的四面体 $A_1A_2A_3A_4$，有

$$V^2=\frac{1}{9}[2(x_1^2x_2^2x_3x_0+x_1^2x_3^2x_2x_0+x_1^2x_0^2x_2x_3+x_2^2x_3^2x_1x_0$$

$$+x_2^2x_0^2x_1x_3+x_3^2x_0^2x_1x_2)-(x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_0^2+x_1^2x_3^2x_0^2$$

$$+x_2^2x_3^2x_0^2)]. \tag{13}$$

(12)是大家熟知的，(13)可由(12)及(3)经计算直接得到，也可直接由引理 1 经计算得到，但这样计算量太大.

引理 5 设 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6 分别是四面体的六条棱长，O 为空间上任意一点，G 为四面体之重心，则有

$$4\sum_{i=1}^{4}|OA_i|^2=16|OG|^2+\sum_{i=1}^{6}P_i^2. \tag{14}$$

(14)是大家熟知的，也可用解析法经计算得出.

定理 2 若四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 存在棱切球，棱切球的半径为 l，

则有

$$16l^2 \geqslant 2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_0+x_2x_3+x_2x_0+x_3x_0) \\ -(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2) \tag{15}$$

$$=\frac{1}{3}(P+Q-2W). \tag{16}$$

其中 x_i 的意义由(3)确定，P 为六条棱长中每两条棱长之积的和，Q 为三组对棱之积的和，W 为六条棱长的平方和.

(15)中等号当且仅当四面体的重心与其棱切球的球心重合时成立.

证明 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的棱切球的球心为 O，棱切球与棱 P_iP_j 切于 M_{ij}，不妨设 $|P_iM_{ij}|=x_i$，则有

$$|P_iP_j|=|P_iM_{ij}|+|P_jM_{ji}|=x_i+x_j.$$

由于 $OM_{ij}\perp P_iP_j$，$\therefore |OP_i|^2=l^2+x_i^2$，再应用引理5，知

$$4\sum_{i=0}^{3}(l^2+x_i^2)=16|OG|^2+\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 3}|P_iP_j|^2$$

$$\Rightarrow 16l^2 \geqslant \sum_{0\leqslant i<j\leqslant 3}(x_i+x_j)^2-4\sum_{i=0}^{3}x_i^2$$

$$=2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_0+x_2x_3+x_2x_0+x_3x_0) \\ -(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2).$$

此即(15)，由过程可知：等号当且仅当四面体的重心 G 与其棱切球的球心 O 重合时成立.

由上式，可知

$$16l^2 \geqslant 2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_0+x_2x_3+x_2x_0+x_3x_0) \\ -(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_0^2)$$

$$=\frac{1}{3}[-(x_1-x_2)^2-(x_1-x_3)^2-(x_1-x_0)^2-(x_3-x_0)^2 \\ -(x_2-x_0)^2-(x_2-x_3)^2+2(x_1+x_2)(x_3+x_0) \\ +2(x_1+x_3)(x_2+x_0)+2(x_1+x_0)(x_2+x_3)]. \tag{17}$$

而 $$-(x_1-x_2)^2=-\frac{1}{2}[(x_1-x_2)^2+(x_1-x_2)^2]$$

$$=-\frac{1}{2}[(a_{13}-a_{23})^2+(a_{10}-a_{20})^2],$$

$$-(x_1-x_3)^2=-\frac{1}{2}[(a_{12}-a_{23})^2+(a_{10}-a_{30})^2],$$

$$-(x_1-x_0)^2=-\frac{1}{2}[(a_{20}-a_{12})^2+(a_{13}-a_{30})^2],$$

$$-(x_2-x_3)^2=-\frac{1}{2}[(a_{20}-a_{30})^2+(a_{12}-a_{13})^2],$$

$$-(x_2-x_0)^2=-\frac{1}{2}[(a_{12}-a_{10})^2+(a_{23}-a_{30})^2],$$

$$-(x_3-x_0)^2=-\frac{1}{2}[(a_{13}-a_{10})^2+(a_{23}-a_{20})^2],$$

$(x_1+x_2)(x_3+x_0)=a_{12}a_{30}$，$(x_1+x_3)(x_2+x_0)=a_{13}a_{20}$，$(x_1+x_0)(x_2+x_3)=a_{10}a_{23}$，

将以上各式代入(17)并整理即得(16).

定理 3 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的体积为 V，其六条棱长之积为 N，且存在棱切球，棱切球半径为 l，外接球半径为 R，则有

$$R^2\geqslant 3l^2, \tag{18}$$

$$Vl\leqslant\frac{1}{24}N^{2/3}. \tag{19}$$

等号当且仅当四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 为正四面体时成立.

证明 在(10)右边应用平均不等式，可知

$$V^2R^2\geqslant\frac{1}{24^2}\cdot 3\cdot 4\cdot 8^2(x_0x_1x_3x_2)^2$$

$$=\frac{4}{3}(x_0x_1x_2x_3)^2. \tag{20}$$

由(5)及(20)，知 $R^2\geqslant 3l^2$.

从过程易知等号当且仅当 $x_0=x_1=x_2=x_3$，即诸棱长相等时成立.

在(5)中应用平均不等式，得

$$V^2l^2\leqslant\left(\frac{1}{24}\right)^2\cdot[(x_0+x_1)(x_0+x_2)(x_0+x_3)(x_2+x_3)(x_1+x_2)\cdot(x_1+x_3)]^{4/3} \tag{21}$$

由(3)及(21),知 $Vl\leqslant\frac{1}{24}N^{2/3}$.

从过程中易知等号当且仅当四面体为正四面体时成立. 证毕.

定理 4 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的体积为 V,且存在棱切球,棱切球、内切球、外接球半径分别为 l,r,R,则有

$$8r^2l\leqslant V\leqslant\frac{8}{9}R^2l\leqslant\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3. \tag{22}$$

等号当且仅当四面体为正四面体时成立.

证明 先证 $V\geqslant 8r^2l$. (23)

记四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 的顶点 P_i 所对的面的面积为 S_i,由海伦公式及(3),得

$$S_0=[x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]^{1/2},$$
$$S_1=[x_0x_2x_3(x_0+x_2+x_3)]^{1/2},$$
$$S_2=[x_0x_1x_3(x_0+x_1+x_3)]^{1/2},$$
$$S_3=[x_0x_1x_2(x_0+x_1+x_2)]^{1/2},$$

又

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}r(S_0+S_1+S_2+S_3)\\&=\frac{1}{3}r[(x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3))^{1/2}+(x_0x_2x_3\cdot(x_0+x_2+x_3))^{1/2}+(x_0x_1x_3(x_0+x_1+x_3))^{1/2}+(x_0x_1x_2\cdot(x_0+x_1+x_2))^{1/2}]\\&\geqslant\frac{4}{3}r[3^4(x_0x_1x_2x_3)^4]^{1/8},\text{(应用平均不等式)}\\&\Rightarrow V^2\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^2r^2\cdot 3\cdot(x_0x_1x_2x_3).\end{aligned} \tag{24}$$

在(24)中应用(5),得

$$V^2 \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2 r^2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2}Vl\right)$$

$$\Rightarrow V \geqslant 8r^2 l.$$

从而(23)成立，且知等号成立的条件如定理 4 中所述.

再证 $V \leqslant \frac{8}{9}R^2 l.$ (25)

易知

$$x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_0^2 + x_1^2x_3^2x_0^2 + x_2^2x_3^2x_0$$
$$\geqslant \frac{2}{3}(x_1^2x_2^2x_3x_0 + x_1^2x_3^2x_2x_0 + x_1^2x_0^2x_2x_3 + x_2^2x_3^2x_1x_0 + x_2^2x_0^2x_1x_3$$
$$+ x_3^2x_0^2x_1x_2) \quad (26)$$

由(13)及(26)，知

$$V^2 \leqslant \frac{4}{27}x_0x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0 + x_3x_0) \quad (27)$$

由(11)并结合(26)，知

$$V^2R^2 \geqslant \frac{1}{36}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0 + x_3x_0)$$
$$[(x_1^3x_2x_3x_0 + x_2^3x_1x_3x_0 + x_3^3x_1x_2x_0 + x_0^3x_1x_2x_3)$$
$$+ \frac{2}{3}x_0x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0$$
$$+ x_3x_0)]$$
$$\geqslant \frac{1}{36}(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0 + x_3x_0)$$
$$\cdot \left[\frac{2}{3}x_0x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0\right.$$
$$+ x_3x_0) + \frac{2}{3}x_0x_1x_2x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3$$
$$\left. + x_2x_0 + x_3x_0)\right]$$
$$= \frac{1}{27}[(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0 + x_3x_0)$$
$$\cdot (x_0x_1x_2x_3)]^2/(x_0x_1x_2x_3), \quad (28)$$

由(27)、(28)及(5)，知

$$V^2R^2 \geqslant \frac{1}{27}\left(\frac{27}{4}\right)^2 V^4 \Big/ \left(\frac{3}{2}Vl\right) = \frac{9}{8} \cdot V^3/l$$

$$\Rightarrow V \leqslant \frac{8}{9}R^2 l.$$

从而(25)成立，且知等号成立的条件如定理 4 中所述.

由(25)及(18)，知

$$V \leqslant \frac{8}{9}R^2 l \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3. \tag{29}$$

由(23)及(29)知(22)成立.

猜想 在本文的记号意义下，有

$$l^2 \geqslant 3r^2. \tag{30}$$

如果(30)成立，则有如下两个美妙的不等式链：

$$R^2 \geqslant 3l^2 \geqslant 9r^2, \tag{31}$$

$$8\sqrt{3}r^3 \leqslant 8r^2 l \leqslant V \leqslant \frac{8}{9}R^2 l \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3. \tag{32}$$

定理 5 设四面体 $P_0P_1P_2P_3$ 存在棱切球，棱切球与外接球的半径分别为 l, R，四面体的六条棱长为 a, b, c, a_1, b_1, c_1，则有

$$16R^2 \geqslant 15R^2 + 3l^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \tag{33}$$

等号当且仅当四面体为正四面体时成立.

证明 只证

$$15R^2 + 3l^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2. \tag{34}$$

由(5)，知 $3V^2l^2 = \frac{4}{3}(x_0x_1x_2x_3)^2$.

由(11)，知

$$\begin{aligned}15V^2R^2 = \frac{5}{12}&(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_0 + x_2x_3 + x_2x_0 + x_3x_0)\\&(x_1^3x_2x_3x_0 + x_2^3x_1x_3x_0 + x_3^3x_1x_2x_0 + x_0^3x_1x_2x_3\\&+x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_0^2 + x_1^2x_3^2x_0^2 + x_2^2x_3^2x_0^2)\end{aligned}$$

由此，要证(34)即证

$$\frac{4}{3}(x_0x_1x_2x_3)^2+\frac{5}{12}(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_0+x_2x_3+x_2x_0+x_3x_0)$$
$$(x_1^3x_2x_3x_0+x_2^3x_1x_3x_0+x_3^3x_1x_2x_0+x_0^3x_1x_2x_3+x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_0^2$$
$$+x_1^2x_3^2x_0^2+x_2^2x_3^2x_0^2)$$
$$\geqslant\frac{1}{9}[2(x_1^2x_2^2x_3x_0+x_1^2x_3^2x_2x_0+x_1^2x_0^2x_2x_3+x_2^2x_3^2x_1x_0$$
$$+x_2^2x_0^2x_1x_3+x_3^2x_0^2x_1x_2)-(x_1^2x_2^2x_3^2+x_1^2x_2^2x_0^2+x_1^2x_3^2x_0^2$$
$$+x_2^2x_3^2x_0^2)][(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2+(x_1+x_0)^2+(x_2$$
$$+x_3)^2+(x_2+x_0)^2+(x_3+x_0)^2], \tag{35}$$

将(35)展开、整理，得

$$12(x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^4x_2^2x_0^2+x_1^4x_3^2x_0^2+x_2^4x_1^2x_3^2+x_2^4x_1^2x_0^2+x_2^4x_3^2x_0^2$$
$$+x_3^4x_1^2x_2^2+x_3^4x_1^2x_0^2+x_3^4x_2^2x_0^2+x_0^4x_1^2x_2^2+x_0^4x_1^2x_3^2+x_0^4x_2^2x_3^2)$$
$$+23(x_1^3x_2^3x_3^2+x_1^3x_2^3x_0^2+x_1^3x_3^3x_2^2+x_1^3x_3^3x_0^2+x_1^3x_0^3x_2^2+x_1^3x_0^3x_3^2+x_2^3x_3^3x_1^2$$
$$+x_2^3x_3^3x_0^2+x_2^3x_0^3x_1^2+x_2^3x_0^3x_3^2+x_3^3x_0^3x_1^2+x_3^3x_0^3x_2^2)-18(x_1^3x_2^2x_3^2x_0$$
$$+x_1^3x_2^2x_0^2x_3+x_1^3x_3^2x_0^2x_2+x_2^3x_1^2x_3^2x_0+x_2^3x_1^2x_0^2x_3+x_2^3x_3^2x_0^2x_1+x_3^3x_1^2x_2^2x_0$$
$$+x_3^3x_1^2x_0^2x_2+x_3^3x_2^2x_0^2x_1+x_0^3x_1^2x_2^2x_3+x_0^3x_1^2x_3^2x_2+x_0^3x_2^2x_3^2x_1)$$
$$-16(x_1^3x_2^3x_3x_0+x_1^3x_3^3x_2x_0+x_1^3x_0^3x_2x_3+x_2^3x_3^3x_1x_0+x_2^3x_0^3x_1x_3$$
$$+x_3^3x_0^3x_1x_2)-9(x_1^4x_2^2x_3x_0+x_1^4x_3^2x_2x_0+x_1^4x_0^2x_2x_3+x_2^4x_1^2x_3x_0$$
$$+x_2^4x_3^2x_1x_0+x_2^4x_0^2x_1x_3+x_3^4x_1^2x_2x_0+x_3^4x_2^2x_1x_0+x_3^4x_0^2x_1x_2+x_0^4x_1^2x_2x_3$$
$$+x_0^4x_2^2x_1x_3+x_0^4x_3^2x_1x_2)\geqslant 0. \tag{36}$$

下证(36)是成立的.

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，可知

$$8(x_1^3x_2^3x_3^2+x_1^3x_2^3x_0^2+x_1^3x_3^3x_2^2+x_1^3x_3^3x_0^2+x_1^3x_0^3x_2^2+x_1^3x_0^3x_3^2$$
$$+x_2^3x_3^3x_1^2+x_2^3x_3^3x_0^2+x_2^3x_0^3x_1^2+x_2^3x_0^3x_3^2+x_3^3x_0^3x_1^2+x_3^3x_0^3x_2^2)$$
$$\geqslant 16(x_1^3x_2^3x_3x_0+x_1^3x_3^3x_2x_0+x_1^3x_0^3x_2x_3+x_2^3x_3^3x_1x_0+x_2^3x_0^3x_1x_3$$
$$+x_3^3x_0^3x_1x_2). \tag{37}$$

又由 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$，知

$$12(x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^4x_2^2x_0^2+x_1^4x_3^2x_0^2+x_2^4x_1^2x_3^2+x_2^4x_1^2x_0^2+x_2^4x_3^2x_0^2$$
$$+x_3^4x_1^2x_2^2+x_3^4x_1^2x_0^2+x_3^4x_2^2x_0^2+x_0^4x_1^2x_2^2+x_0^4x_1^2x_3^2+x_0^4x_2^2x_3^2)$$
$$=9[(x_1^4x_2^2x_3^2+x_1^4x_2^2x_0^2+x_1^4x_3^2x_0^2+x_2^4x_1^2x_3^2+x_2^4x_1^2x_0^2+x_2^4x_3^2x_0^2$$
$$+x_3^4x_1^2x_2^2+x_3^4x_1^2x_0^2+x_3^4x_2^2x_0^2+x_0^4x_1^2x_2^2+x_0^4x_1^2x_3^2+x_0^4x_2^2x_3^2)]$$
$$+3[(x_1^4x_2^2x_3^2+x_2^4x_3^2x_1^2+x_3^4x_2^2x_1^2)+(x_1^4x_2^2x_0^2+x_2^4x_1^2x_0^2$$
$$+x_0^4x_1^2x_2^2)+(x_1^4x_3^2x_0^2+x_3^4x_1^2x_0^2+x_0^4x_1^2x_3^2)+(x_2^4x_3^2x_0^2+x_3^4x_2^2x_0^2$$
$$+x_0^4x_2^2x_3^2)]$$
$$\geqslant 9(x_1^4x_2^2x_3x_0+x_1^4x_3^2x_2x_0+x_1^4x_0^2x_2x_3+x_2^4x_1^2x_3x_0+x_2^4x_3^2x_1x_0$$
$$+x_2^4x_0^2x_1x_3+x_3^4x_1^2x_2x_0+x_3^4x_2^2x_1x_0+x_3^4x_0^2x_1x_2+x_0^4x_2^2x_1x_3$$
$$+x_0^4x_1^2x_2x_3+x_0^4x_3^2x_1x_2)+3(x_1^3x_2^3x_3^2+x_1^3x_3^3x_2^2+x_1^3x_0^3x_2^2$$
$$+x_1^3x_2^3x_0^2+x_1^3x_3^3x_0^2+x_1^3x_0^3x_3^2+x_2^3x_3^3x_1^2+x_2^3x_3^3x_0^2+x_2^3x_0^3x_1^2$$
$$+x_2^3x_0^3x_3^2+x_3^3x_0^3x_1^2+x_3^3x_0^3x_2^2), \tag{38}$$

由(37)、(38),知

$$(36)左边\geqslant 18[(x_1^3x_2^3x_3^2+x_1^3x_2^3x_0^2+x_1^3x_3^3x_2^2+x_1^3x_3^3x_0^2+x_1^3x_0^3x_2^2$$
$$+x_1^3x_0^3x_3^2+x_2^3x_3^3x_1^2+x_2^3x_3^3x_0^2+x_2^3x_0^3x_1^2+x_2^3x_0^3x_3^2$$
$$+x_3^3x_0^3x_1^2+x_3^3x_0^3x_2^2)-(x_1^3x_2^2x_3^2x_0+x_1^3x_2^2x_0^2x_3$$
$$+x_1^3x_3^2x_0^2x_2+x_2^3x_1^2x_3^2x_0+x_2^3x_1^2x_0^2x_3+x_2^3x_3^2x_0^2x_1$$
$$+x_3^3x_1^2x_2^2x_0+x_3^3x_1^2x_0^2x_2+x_3^3x_2^2x_0^2x_1+x_0^3x_1^2x_2^2x_3$$
$$+x_0^3x_1^2x_3^2x_2+x_0^3x_2^2x_3^2x_1)] \tag{39}$$

又由 $a^2b+ab^2\leqslant a^3+b^3(a,b\in R^+)$,知

$$x_1^3[x_2^2(x_3^2x_0+x_0^2x_3)+x_3^2(x_2^2x_0+x_0^2x_2)+x_0^2(x_2^2x_3+x_3^2x_2)]+x_2^3$$
$$\cdot[x_1^2(x_3^2x_0+x_0^2x_3)+x_3^2(x_1^2x_0+x_0^2x_1)+x_0^2(x_1^2x_3+x_3^2x_1)]+x_3^3[x_1^2$$
$$(x_2^2x_0+x_0^2x_2)+x_2^2(x_1^2x_0+x_0^2x_1)+x_0^2(x_1^2x_2+x_2^2x_1)]+x_0^3[x_1^2(x_3^2x_2$$
$$+x_2^2x_3)+x_2^2(x_1^2x_3+x_3^2x_1)+x_3^2(x_1^2x_2+x_2^2x_1)]$$
$$\leqslant x_1^3[x_2^2(x_3^3+x_0^3)+x_3^2(x_2^3+x_0^3)+x_0^2(x_2^3+x_3^3)]+x_2^3[x_1^2(x_3^3$$
$$+x_0^3)+x_3^2(x_1^3+x_0^3)+x_0^2(x_1^3+x_3^3)]+x_3^3[x_1^2(x_2^3+x_0^3)+x_2^2(x_1^3$$
$$+x_0^3)+x_0^2(x_1^3+x_2^3)]+x_0^3[x_1^2(x_2^3+x_3^3)+x_2^2(x_1^3+x_3^3)$$

$$+x_3^2(x_1^3+x_2^3)]$$

$$\Leftrightarrow x_1^3x_2^2x_3^2x_0+x_1^3x_2^2x_0^2x_3+x_1^3x_3^2x_0^2x_2+x_2^3x_1^2x_3^2x_0+x_2^3x_1^2x_0^2x_3$$

$$+x_2^3x_3^2x_0^2x_1+x_3^3x_1^2x_2^2x_0+x_3^3x_1^2x_0^2x_2+x_3^3x_2^2x_0^2x_1+x_0^3x_1^2x_2^2x_3$$

$$+x_0^3x_1^2x_3^2x_2+x_0^3x_2^2x_3^2x_1$$

$$\leqslant x_1^3x_2^3x_3^2+x_1^3x_2^3x_0^2+x_1^3x_3^3x_2^2+x_1^3x_3^3x_0^2+x_1^3x_0^3x_2^2+x_1^3x_0^3x_3^2$$

$$+x_2^3x_3^3x_1^2+x_2^3x_3^3x_0^2+x_2^3x_0^3x_1^2+x_2^3x_0^3x_3^2+x_3^3x_0^3x_1^2+x_3^3x_0^3x_2^2. \tag{40}$$

由(39)、(40)知(36)成立，从而(35)成立，故(34)也成立，且等号当且仅当 $a=b=c=a_1=b_1=c_1$ 时成立. 证毕.

参考文献

[1]杨之，四面体棱切球存在的一个充要条件，湖南数学通讯，1985 年第 6 期.

[2]杨路、张景中，关于有限点集的一类不等式，数学学报，1980 第 5 期，740--749.

n 维空间有限点集几何不等式研究综述

毛其吉

扬州大学师范学院数学与计算机科学系(江苏,225002)

§1　前言

本文对 1979—1994 年以来国内学者在 n 维空间的有限点集,尤其是单纯形方面的几何不等式的研究结果加以综述.

国内学者在近十多年来,在高维空间几何不等式的研究方面取得了长足的发展,发表论文逾百篇,取得了可喜的成果.尤其是中国科学院成都分院杨路、张景中两位研究员的工作,同他们在其他领域所取得的成就一样,在几何不等式领域所取得的研究成果是十分出色的,引起国内同行学者的极大兴趣和重视,在国际上,也得到有关专家的高度评价.

70 年代末至 80 年代,杨路、张景中两位研究员在距离几何与几何不等式方面发表了一系列研究论文,为我国学者开展几何不等式的研究起了奠基性的作用.由于他们在几何不等式方面的研究成果十分丰富,在本文中不可能一一列出,他们研究成果的详细情况可从本书所附的参考文献总目中查阅到.现只将其中影响最大,被广为引用的几个主要结果叙述于下.

1. 杨路-张景中不等式

1980 年,杨路、张景中在文[1]中建立了下面的一组不等式:

定理 1 设 $G=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}$ 是 E^m 中的有限点集，任取 G 的 $k+1$ 个点为顶点作 k 维单形.将所有这样的 k 维单形的 k 维体积的平方和记为 $N_k(k=1,2,\cdots,m)$，则有

$$\frac{N_k^l}{N_l^k}\geqslant\frac{[(m-l)!\ (l!)^3]^k}{[(m-k)!\ (k!)^3]^l}(m!\ N)^{l-k}\quad(1\leqslant k<l\leqslant m),\qquad(1)$$

$$N_k^2\geqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\cdot\frac{m-k+1}{m-k}\cdot N_{k-1}N_{k+1}\ (1\leqslant k\leqslant m,N_0=N).\qquad(2)$$

而等号成立当且仅当 G 的密集椭球为球时成立.

1981 年，他们将不等式(1)、(2)推广为下面的定理[2].

定理 2 设 $\varphi=\{A_i(m_i),i=0,1,\cdots,N\}$ 是 $\boldsymbol{E}^n(n\leqslant N)$ 中的质点组，m_i 是点 A_i 所赋有的质量. φ 中任意$(k+1)$个点 $A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$所支撑的单形的 k 维体积记为 $V_{i_0i_1\cdots i_k}$，令

$$M_k=\sum\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0i_1\cdots i_k}(1\leqslant k\leqslant n).$$
$$M_0=m_0+m_1+\cdots+m_N\neq 0.$$

则有不等式

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[(n-l)!\ (l!)^3]^k}{[(n-k)!\ (k!)^3]^l}(n!\ M_0)^{l-k}(1\leqslant k<l\leqslant n,m_i\geqslant 0),\qquad(3)$$

$$M_k^2\geqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\cdot\frac{n-k+1}{n-k}\cdot M_{k-1}M_{k+1}(1\leqslant k\leqslant n,m_i\text{ 可正可负}).\qquad(4)$$

式中等号当且仅当 φ 的密集椭球为球时成立.

从不等式(1)—(4)可以导出许多不等式，因而是应用相当广泛的一类不等式，已被 D. S. Mitrinović收入专著《几何不等式的新进展》一书中[4]，并可参阅左铨如的《杨-张不等式的若干推论》一文.

2. 基本图形的度量方程

把 $\boldsymbol{E}^n$ 中的每个点或者每个定向超平面都叫做基本元素，由 k

个基本元素构成的集叫做 E^n 中的一个 k 元基本图形.

设 $\mathfrak{S}$ 是一个基本图形, $\mathfrak{S}=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$, 这些 $e_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 是基本元素——点或定向超平面, 在 $\mathfrak{S}$ 上定义一个二元实值函数

$$g:\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\rightarrow R,$$

使得

$$g(e_i,e_j)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\rho^2(e_i,e_j), \text{当 } e_i,e_j \text{ 都是点;}\\ \cos \widehat{e_ie_j}, \text{当 } e_i,e_j \text{ 都是超平面;}\\ d(e_i,e_j), \text{当 } e_i,e_j \text{ 中一为点, 一为面.}\end{cases}$$

这里, $\rho(x,y)$ 表示两点 x,y 间的距离, $\widehat{xy}$ 表示两定向超平面 x,y 之间的夹角, 而 $d(x,y)$ 则表示点 x(或 y)到定向超平面 y(或 x)的带号距离. 简单地记

$$g_{ij}=g(e_i,e_j),$$

我们有下述命题.

定理 3 设 $\mathfrak{S}=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$ 是 E^n 中的基本图形, 令

$$\delta_i=1-g_{ii},\quad 1\leqslant i\leqslant N,$$

并令 $[\mathfrak{S}]$ 表示下列 $N+1$ 阶方阵:

$$[\mathfrak{S}]=\begin{bmatrix}0 & \delta_1 & \delta_2\cdots\delta_N\\ \delta_1 & & \\ \delta_2 & & g_{ij}\\ \vdots & & \\ \delta_N & & \end{bmatrix}$$

记 $P[\mathfrak{S}]=\det[\mathfrak{S}]$, 则当 $N>n+1$ 时, 有

$$P[\mathfrak{S}]=0. \tag{5}$$

杨路、张景中对球面型空间与双曲型空间中的基本图形也建立了类似的结论[4], 在此基础上, 他们还一般地建立了抽象距离空间的秩的概念[5].

形如(5)的方程, 叫做基本图形的度量方程, 它推广了 Cayley-Menger 的结果[6]. 方程(5)在一些重要的几何不等式的证明中扮

演了重要的角色. 例如,双曲型空间紧致集的覆盖半径[7]、高维空间的 Neuberg-Pedoe 不等式[8]及单形宽度的 Sallee 猜想的证明[9]等等,都运用了类似于(5)的度量方程.

3. 伪对称集与有关的几何不等式

在文[10]中,杨路、张景中引进了 $\boldsymbol{E}^n$-伪对称集的概念,这是比"惯量等轴"更强的对称条件. 这一概念的引进推动了几何不等式的研究.

在文[10]中,证明了下列不等式:

$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot M_2^2(\mathfrak{S}) \tag{6}$$

其中 $M_r(\mathfrak{S})$ 表示 $\boldsymbol{E}^n$ 中 N 个点 P_i 之间的距离的 r 次幂的平均值,即

$$M_r(\mathfrak{S})=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}|P_i-P_j|^r.$$

将不等式(6)应用于紧致曲面:设 $\mathscr{S}$ 是 $\boldsymbol{E}^n$ 中的紧致曲面,令 F 表示 $\mathscr{S}$ 的面积. 引进 $\mathscr{S}$ 的弦幂平均

$$M_r(\mathscr{S})=\frac{1}{F^2}\int_{\mathscr{S}}\int_{\mathscr{S}}|X-Y|^r\mathrm{d}\sigma(X)\mathrm{d}\sigma(Y).$$

有如下的定理:对 $\boldsymbol{E}^n$ 中任意一个紧致曲面 $\mathscr{S}$ 成立着关系

$$M_4(\mathscr{S})\geqslant\frac{n+1}{n}M_2^2(\mathscr{S}). \tag{7}$$

等号当且仅当 $\mathscr{S}$ 是一个超球面时成立.

§2 有关单形体积的不等式

设 $\sum_A\left(\sum_B\right)$ 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中的一个非退化单形,$\sum_A\left(\sum_B\right)$ 的顶点为 $A_i(B_i)$,其中 $i=1,2,\cdots,n+1$. $\sum_A$ 的体积的绝对值以 $|V(A)|$ 或 V 表示,而顶点 A_i 所对的 $(n-1)$ 维侧面记为

f_i. 侧面 f_i 的 $(n-1)$ 维体积以 V_i 表示. 又以 ρ_{ij} 表示相应的棱长，即 $\rho_{ij}=|\overline{A_iA_j}|$，则有[2]

定理 4

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}},\tag{8}$$

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{n}{n-1}},\tag{9}$$

$$n!\ V\leqslant\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}.\tag{10}$$

(8)—(10)中当单形为正则时等号成立.

不等式(10)一般称为 Veljan-Korchmàros 不等式. 张垚在文[11]中，考虑了它的改进.

苏化明最近在文[12]中给出了一个联系单形体积 V 与 V_i 及棱长 ρ_{ij} 的一个不等式：

$$\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{n-1}\geqslant\left[\frac{n^{3(n-1)}}{2(n+1)^{n-2}(n!)^2}\right]^{\frac{n-1}{2}}V^{(n+1)(n-2)}\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\rho_{ij}\right)^{\frac{2}{n}}.\tag{11}$$

其中等号当且仅当 $\sum_A$ 为正则单形时成立.

应用重心坐标与行列式计算，1985—1987 年，文[13]—[15]中分别给出了下列几个结果的证明.

定理 5 设 P 为单形 $\sum_A$ 内任意一点，连线 PA_i 的延长线交对面于 B_i，则

$$|V(B)|\leqslant\frac{1}{n^n}|V(A)|.\tag{12}$$

当且仅当 P 是单形 $\sum_A$ 的重心时取等号.

定理 6 设 G 为单形 $\sum_A$ 的重心，A_iG 交 $\sum_A$ 的外接 $(n-1)$ 维超球面 S^{n-1} 于 B_i，则

$$|V(B)| \geqslant |V(A)|. \tag{13}$$

等号当且仅当单形$\sum_A$的重心与外心相重合成立.

定理 7 设n维单形$\sum_B$是非退化单形$\sum_A$的内切球的切点构成的单形,则有

$$|V(B)| \leqslant \frac{1}{n^n}|V(A)|. \tag{14}$$

当$\sum_A$为正则单形时等号成立.

记n维单形$\sum_A$的所有m维子单形的体积平方的λ次初等对称多项式为P_λ;而所有m维子单形的体积的λ次初等对称多项式为Q_λ,苏化明证明了[16]如下的定理.

定理 8 n维单形$\sum_A$与它的切点单形$\sum_B$的不变量P_λ、P_λ',Q_λ与Q_λ'之间有不等式

$$P_\lambda' \leqslant n^{-2m\lambda} P_\lambda; \tag{15}$$

$$Q_\lambda' \leqslant n^{-m\lambda} Q_\lambda. \tag{16}$$

(15)、(16)两式中等号当且仅当$\sum_A$为正则时成立.

文[13]中提出了下面的猜测:自单形$\sum_A$内任意一点P作各面的垂线,分别交各对面于$H_1, H_2, \cdots, H_{n+1}$,则

$$|V(H)| \leqslant \frac{1}{n^n}|V(A)|. \tag{17}$$

上面的不等式已于1990年为张垚所证明[17A]. 1992年,张垚给出了不等式(17)的一个新证明. 并给出了(17)中等号成立的充要条件[17B].

§3 含内径、外径和体积的不等式

1981年,杨路、张景中证明了[18]如下的定理.

定理 9

$$R\leqslant\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{n!\ V}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n}} \tag{18}$$

等号成立当且仅当存在着 $n+1$ 个正数 $\mu_r>0(r=1,2,\cdots,n+1)$，使

$$\rho_{ij}=\mu_i\mu_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant n+1.$$

不等式(18)中 R 表示单形的外接球半径，简称外径. 又以 r 表示单形的内切球半径，简称内径，则由不等式(9)，易得[2]

$$n!\ V\geqslant\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right]^{1/2}\cdot n^n r^n. \tag{19}$$

又由内接于一个球的一切单形中，以正则单形体积最大[19]，可以得到

$$n!\ V\leqslant\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\right]^{1/2}\cdot R^n. \tag{20}$$

不等式(19)与(20)得出

$$R\geqslant nr. \tag{21}$$

1979 年，M. S. Klamkin 等给(21)一个简单证明[20]. 后于 1985 年给出(1)的一个加强形式[21]：

$$R^2\geqslant n^2r^2+\overline{OI}^2. \tag{22}$$

其中 O，I 表示单形的外心，内心. 又以 G 表示单形的重心.

文[22、23、24]中给出了不等式(21)、(22)的改进形式：

$$(1)R\geqslant\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot nr; \tag{23}$$

$$(2)R^2\geqslant\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}}n^2r^2+\overline{OI}^2; \tag{24}$$

$$(3)R^2\geqslant\delta_n n^2r^2+\overline{OG}^2. \tag{25}$$

其中(25)式的 δ_n 是与棱长相关的数，且 $\delta_n\geqslant1$.

不等式(21)—(25)中等号成立当且仅当单形是正则单形时.

§4 Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广

1980 年,杨路和张景中把 N-P 不等式推广到高维空间[18].

定理 10 设 $\sum_A$ 和 $\sum_B$ 是 $\boldsymbol{E}^n$ 中的两个 n 维单形,$V(A)$、$V(B)$分别表示 A、B 的体积. 设 A 的顶点是 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$,$B$ 的顶点是 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$,且

$$a_{ij}=|A_iA_j|,\ b_{ij}=|B_iB_j|.$$

以 S_i 表示$\{B_1, B_2, \cdots B_{n+1}\}/B_i$ 所成的$(n-1)$维单形之面积,θ_{ij}表示 S_i、S_j 之夹角,则有

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^2 V(A)^{\frac{2}{n}} V(B)^{2-\frac{2}{n}}. \tag{26}$$

1987 年,苏化明给出了下列形式的 N-P 不等式的高维推广[25].

定理 11 设 $\sum_A$, $\sum_B$ 为 n 维欧氏空间中的两个单形($n \geqslant 3$),其棱长分别为 a_i, b_i,其中 $i=1,2,\cdots,\frac{1}{2}n(n+1)$,体积分别为 V, V',则有

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} b_i^2 \left(\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j^2 - 2a_i^2 \right)$$

$$\geqslant n(n+1)(n^2+n-4)\left(\frac{n!^2}{n+1} \right)^{\frac{2}{n}} (VV')^{\frac{2}{n}}; \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} b_i \left(\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j - 2a_i \right)$$

$$\geqslant \frac{1}{2}n(n+1)(n^2+n-4)\left(\frac{n!^2}{n+1} \right)^{\frac{1}{n}} (VV')^{\frac{1}{n}}. \tag{28}$$

1989 年,陈计、马援改进了(27)、(28),证明了,当 $\theta \in (0,1]$

时，有

$$\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2} b_i^{2\theta}\left(\sum_{j=1}^{C_{n+1}^2} a_j^{2\theta}-nb_i^{2\theta}\right) \geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{n!^2}{n+1}\right]^{\frac{2\theta}{n}}(V_1V_2)^{\frac{2\theta}{n}}. \tag{29}$$

(27)--(29)式中等号当且仅当$\sum_A$，$\sum_B$均为正则单形时取到.

当$\theta=1$或$\theta=\frac{1}{2}$时，文[27]中也给出了不等式(29)的证明.

文[28]中应用距离几何的方法研讨了N-P不等式在n维欧氏空间E^n的推广.

1992年，尹景尧、陈奉孝获得了一个联系两个单形的恒等式[29].

定理 12 令$\sum_A$，$\sum_B$表示E^n中的两个单形，$\sum_A\left(或\sum_B\right)$之顶点$A_i$(或$B_i$)到$\sum_B\left(或\sum_A\right)$的侧面$f_{B_j}$(或$f_{A_j}$)的有向距离为$h_{ij}$(或$h'_{ij}$)，则有

$$\det(h_{ij})、\det(h'_{ij})=\frac{n^{2(n+1)}(VV')^{n+1}}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}(V_iV'_i)}. \tag{30}$$

作为(30)的应用，该文给出了含有h_{ij}，h'_{ij}等几何量的一些不等式.

§5 有关单形宽度的不等式

在n维欧氏空间E^n中，一个有界凸体K的宽度是这样定义的：对于每个单位向量u，将K的一对与u垂直的支撑超平面之间的距离记作$\tau(K,u)$. 令

$$w(K)=\operatorname*{Min}_u\tau(K,u),$$

将$w(K)$叫做K的宽度.

Sallee 在 1974 年提出猜测说："内接于球的所有单形中，正则单形具有最大宽度."[30] 随后，这个猜测被 R. Alexander 所证实[31].

1983 年，杨路、张景中在文[9]中证明了如下定理.

定理 13 若 $w(\Delta_n)$ 和 $V(\Delta_n)$ 分别记 n 维单形的宽度和体积，则有

$$w(\Delta_n)\leqslant C_n V(\Delta_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{31}$$

其中

$$C_n=\frac{n!^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{n-1}{2n}}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{1/2}}.$$

而且(31)中的等号当且仅当 Δ_n 是正则单形时取到.

由不等式(31)可知："一切维数相同体积相等的单形中，正则单形具有最大宽度."这是比 Sallee 猜测更强的一个结果.

1989 年，在文[9]的基础上，毛其吉、左铨如给出了下列命题[32].

定理 14 在 n 维单形的宽度 $w(\Delta_n)$ 与内切球半径 $r(\Delta_n)$，外接球半径 $R(\Delta_n)$ 之间有

$$w(\Delta_n)\leqslant\beta_n r(\Delta_n), \tag{32}$$

$$w(\Delta_n)\leqslant\alpha_n R(\Delta_n). \tag{33}$$

其中

$$\alpha_n=\frac{1}{n}\beta_n,$$

$$\beta_n=\frac{n^{1/2}(n+1)}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{1/2}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{1/2}}.$$

且等号当且仅当 Δ_n 是正则单形时可以取到.

由此可知："外切于球的所有单形中，正则单形具有最大宽

度."

§6 Oppenheim 不等式的高维推广

设$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的边为$a_1,b_1,c_1;a_2,b_2,c_2$,定义a_3,b_3,c_3为

$a_3^2=a_1^2+a_2^2,b_3^2=b_1^2+b_2^2,c_3^2=c_1^2+c_2^2$,则$a_3,b_3,c_3$为一三角形的边.该三角形记为$\triangle A_3B_3C_3$. Oppenheim 给出了$\triangle A_3B_3C_3$的不变量(面积、高)与$\triangle A_iB_iC_i\ (i=1,2)$的不变量(面积、高)的不等式[33,34].

1975 年,R. Alexander 在文献[35]中给出了两个点集的"度量加"的概念:

定义 设$\mathscr{A}=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$和$\mathscr{B}=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_n\}$是欧氏空间或 Hilbert 空间中的两个点集,则在 Hilbert 空间(甚至欧氏空间)中必存在一个点集$\{S_1,S_2,\cdots S_n\}$,使得

$$|S_i-S_j|^2=|P_i-P_j|^2+|Q_i-Q_j|^2,i,j=1,2,\cdots,n.$$

这个存在性是 I. J. Schoenberg 早就证明了的.我们将任何一个这样的点集叫做前两者的"度量和",并记为

$$\mathscr{A}\overset{*}{+}\mathscr{B}=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}.$$

如果用V,V',V''表示由$\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}\overset{*}{+}\mathscr{B}$所生成的$(n-1)$维单形的体积,Alexander 猜想有不等式:

$$V''^2\geqslant V^2+V'^2.$$

杨路、张景中已经指出 Alexander 猜想不是真的,同时给出了正确的不等式:[36]

$$V''^{\frac{2}{n-1}}\geqslant V^{\frac{2}{n-1}}+V'^{\frac{2}{n-1}}.\tag{34}$$

如果考虑$\mathscr{A},\mathscr{B}$及其度量和$\mathscr{A}\overset{*}{+}\mathscr{B}$的外接球半径$R$、$R'$和

R''.则有

定理 15 $R''^2 \leqslant R^2 + R'^2$. (35)

和

定理 16 $h''^2_i \geqslant h_i^2 + h'^2_i$. (36)

其中 $i=0,1,\cdots,n$,h_i,h'_i 或 h''_i 表示 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 或 $\mathscr{A} \overset{*}{+} \mathscr{B}$ 所生成的单形中,经过对应顶点的高线长度(设 $i=0,1,\cdots,n$.这时各单形都是 n 维的).

此外,还有

定理 17 设 $\mathscr{A}$,$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{A} \overset{*}{+} \mathscr{B}$ 表示两个点集及其度量和,令 R_c,R'_c 和 R''_c 依次表示此三个点集的覆盖半径.则总有

$$R''^2_c \leqslant R^2 + R'^2_c. \tag{37}$$

其它的有关于"度量和"的参考文献可见[37 - 39].

§7 单形中诸元素间的不等式

本节叙述涉及单形的"顶点角",二面角,角平分面,中线,……等几何元素的一些不等式.

1968 年,P. Bartoš在文[40]中引进 n 维单形的"顶点角"的概念:

设 $\sum_A$ 是 E^n 中的 n 维单形,$\overline{e}_1,\overline{e}_2,\cdots,\overline{e}_{n+1}$依次是 $\sum_A$ 的 $n+1$ 个界面上的单位法向量,令

$$D_i = \det(\overline{e}_1,\overline{e}_2,\cdots,\overline{e}_{i-1},\overline{e}_{i+1},\cdots,\overline{e}_{n+1}),$$

则把 $\alpha_i = \arcsin|D_i|$定义为此单形的第 i 个界面所对应的"顶点角".

1987 年,蒋星耀在文[42]中证明了如下定理.

定理 18 对于 E^n 中 n 维单形 $\sum_A$ 的诸顶点角 α_i,有不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\alpha_i\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{38}$$

而且当 $\sum_A$ 是正则单形时等号成立.

有关不等式(38)的加强或推广的工作可参考文献[43—45]及[17B].

1987 年,在文[46]中,证明了如下定理.

定理 19 记单形 $\sum_A$ 的任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内角为 $\widehat{f_if_j}=\theta_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant n+1)$,则对于任意实数 $x_i(i=1,2,\cdots,n+1)$,成立不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}x_ix_j\cos\theta_{ij}. \tag{39}$$

其中等号当且仅当 x_i 与 f_i 的面积成比例时成立.

特别取 $x_i=1$,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\cos\theta_{ij}\leqslant\frac{1}{2}(n+1). \tag{40}$$

有关单形二面角的其他不等式的文章尚可参见[47].

1993 年,苏化明在文[48]中证明了如下定理.

定理 20 设 $\sum$ 为 $E^n(n\geqslant 2)$中的单形,它的顶点角为 α_i,它的任意两个侧面 f_i,f_j 所成的内二面角为 θ_{ij},又 m_i 为正数$(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}m_j^2\right)\sin^2\alpha_i\leqslant\left[\frac{2}{n(n-1)}\right]^{n/2}\left[\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(m_im_j\sin\theta_{ij})^2\right]^{n/2}$$
$$\leqslant\frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\right)^n. \tag{41}$$

其中等号成立的充要条件是下列各式均成立

$$\frac{m_i^2}{\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2}=\frac{\cos\theta_{jk}}{n(\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ik}+\cos\theta_{jk})})$$

$i,j,k=1,2,\cdots,n+1$，i,j,k 两两不等.

1992 年，文[49]中给出了单形的内角平分面面积的几个不等式.

定理 21 设单形 $\sum_A$ 中两个侧面 f_i,f_j 所成的内角平分面面积为 $T_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n+1)$，则有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} T_{ij}\leqslant\sqrt{\frac{n(n+1)}{8}}\sum_{i=1}^{n+1}V_i; \tag{42}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n+1,\\ 1\leqslant k<l\leqslant n+1,\\ (i,j)\neq(k,l)}} T_{ij}T_{kl}\leqslant\frac{(n-1)(n+1)(n-2)}{8n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}V_iV_j; \tag{43}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} T_{ij}^2\leqslant\frac{n+1}{4}\sum_{i=1}^{n+1}V_i^2; \tag{44}$$

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} T_{ij}\leqslant\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{1}{4}n(n+1)}\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{n/2}. \tag{45}$$

其中(42)、(43)、(45)中等号当且仅当 $\sum_A$ 为正则单形时成立，(44)中等号当且仅当诸 V_i 相等时成立.

1989 年，文[50]中给出几个与重心有关的不等式.

定理 22 设 G 是单形 $\sum_A$ 的重心，A_iG 交单形的外接超球面于 $A'_i(i=0,1,\cdots,n)$，记中线长 $m_i=\overline{A_iG_i}(i=0,1,\cdots,n)$，则有

$$(1)\sum_{i=0}^{n}\overline{A_iA'_i}\geqslant\frac{2n}{n+1}\sum_{i=0}^{n}m_i; \tag{46}$$

$$(2)\sum_{i=0}^{n}\overline{A_iA'_i}\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}; \tag{47}$$

$$(3)\sum_{i=0}^{n}(\overline{A_iA'_i})^2\geqslant\frac{4}{n+1}\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^2=\frac{4n^2}{(n+1)^2}\sum_{i=0}^{n}m_i^2. \tag{48}$$

当且仅当单形$\sum_A$的重心G与它的外心O重合时,(46)、(48)中等号成立;又当且仅当$\sum_A$为正则单形时,(47)中等号成立.

其他的有关几何不等式尚可参见[51—56].

§8 与伪对称集相关的不等式

自杨路、张景中的论文[10]问世以后,有关伪对称集的几何不等式引起了人们的关注与兴趣.

1988年,周加农在文[57]中证明了如下定理.

定理 23 设$\mathfrak{S}=\{P_1,P_2\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset \boldsymbol{E}^n(N>n)$, $a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$,那么下列不等式成立:

$$\left(\sum_{1\le i<j\le N}a_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\le i<j<k\le N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2. \tag{49}$$

等号成立的充分必要条件是矩阵$A=(a_{ij}^2)$的负特征值相等.

上述不等式(49)在文[58]中被推广到质点系的情形.

定理 24 设质点系$\sigma(m)=\{P_i(m_i),i=1,2,\cdots,N\}$,共超球面$S_{n-1,R}\subset\boldsymbol{E}^n(N>n)$,$S_{n-1,R}$之中心为坐标原点,$a_{ij}=d(P_i,P_j)$ $(i,j=1,2,\cdots,N)$,则成立不等式:

$$\left(\sum_{1\le i<j\le N}m_im_ja_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\le i<j<k\le N}m_im_jm_Ka_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2. \tag{50}$$

等号成立当且仅当矩阵$A=(\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}a_{ij}^2)^3$的所有负特征值皆相等.

文[59]中,给出了伪对称集的一个充分必要条件.

定理 25 设$\mathfrak{S}=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset\boldsymbol{E}^n(N>n)$, $a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$,则有

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq N} a_{ij}^2 a_{jk}^2 a_{ki}^2 \leqslant \frac{4N^3(n^2-1)R^6}{3n^2}. \tag{51}$$

等号成立的充分必要条件是点集 $\mathfrak{S}$ 为 $\boldsymbol{E}^n$-伪对称集.

1992 年，杨世国在文[60]中，也给出了伪对称集的一些充分必要条件.

定理 26 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为$\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则 σ 是伪对称集的充分必要条件是下面两式同时成立：

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{N^2}{4}, \\ \displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{(n+1)N^2}{8n}. \end{cases} \tag{52}$$

定理 27 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为$\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则有不等式

$$\frac{N^4}{16}\geqslant\sum_{\substack{1\leq i<j\leq N\\ 1\leq j<k\leq N\\ i\neq j \text{或} j\neq k}}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{jk}}{2r}+\left[\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\right]^{1/3}$$
$$\cdot\left(\sum_{1\leq i<j<k\leq N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{jk}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{ki}}{2r}\right)^{2/3}. \tag{53}$$

等号成立当且仅当 σ 是伪对称集.

联系伪对称集的问题，文[61]中证明了如下定理.

定理 28 在 $\boldsymbol{E}^n$ 中，当 n 为偶数时，$n+2$ 个点必能成 $\boldsymbol{E}^n$ 伪对称的；当 n 为奇数时，$n+2$ 个点不可能成为 $\boldsymbol{E}^n$ 伪对称的.

由于资料不足，时间匆促，本文所述自有不全失妥之处，望专家、学者批评补正.

参考文献

[1]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，5(1980).

[2]张景中、杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，2

(1981).

[3]D. S. Mitrinović,陈计等译,几何不等式的新进展,北京大学出版社,1994.

[4]杨路、张景中,非欧双曲几何的若干度量问题 I 等角嵌入和度量方程,中国科学技术大学学报,数学专辑(1983).

[5]杨路、张景中,抽象距离空间的秩的概念,中国科学技术大学学报,4(1980).

[6]Blumenthal. L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, Oxford, 1953.

[7]杨路、张景中,双曲型空间紧致集的覆盖半径,中国科学(A 辑),8(1982).

[8]杨路、张景中,Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用,数学学报,3(1981).

[9]杨路、张景中,度量方程应用于 Sallee 猜想,数学学报,4(1983).

[10]杨路、张景中,伪对称集与有关的几何不等式,数学学报,6(1986).

[11]张垚,Veljan-Korchmaros 不等式的改进,数学杂志,4(1990).

[12]苏化明,一个涉及单形体积、棱长及侧面面积的不等式,数学杂志,4(1993).

[13]苏化明,关于单形的一个不等式,数学通报,5(1985).

[14]刘根洪,关于 n 维单形体积不等式的一个定理,数学的实践与认识,4(1986).

[15]毛其吉、左铨如,切点单形的一个几何不等式,数学的实践与认识,4(1987).

[16]苏化明,关于切点单形的两个不等式,数学研究与评论,2(1990).

[17A]张垚,关于单形的一个猜想,湖南教育学院学报,5(1990).

[17B]张垚,关于垂足单形的一个猜想,系统科学与数学,4(1992).

[18]杨路、张景中,一个代数定理的几何证明(英),中国科学技术大学学报,4(1981).

[19]R. M. Tanner, Some content maximizing properties theregular simplex, Pac. J. Math., 52(1974).

[20]M. S. Klamkin, The circumradins-inradius inequality fora simplex, Math,Magazine, 52(1979).

[21]Klamkin, M. S., Problem 85. 26, Inequaliey for a simplex, SIAM

Rev., 27(1985).

[22]左铨如、毛其吉,M. S. Klamkin 问题的推广,科学通报,1(1987).

[23]杨世国,E^n 中 *Euler* 不等式的推广,数学杂志,4(1991).

[24]杨世国,Klamkin 定理的推广,东北数学,4(1991).

[25]苏化明,关于单形的两个不等式,科学通报,1(1987).

[26]陈计、马援,涉及两个单形的一类不等式,数学研究与评论,2(1989).

[27]毛其吉,联系两个单形的不等式,数学的实践与认识,3(1989).

[28]熊俏,关于 *Neuberg-Pedoe* 不等式高维推广的一个注记,数学季刊,3(1991).

[29]尹景尧、陈本孝,关于联系两个单形的几何恒等式及应用,数学进展,3(1992).

[30]Guy,R. K., Lecture Notes in Math., 490, Springer Verlag, 1975.

[31]Alexander, R. The width and diameter of a simplex, Geom. Dedicata, 6:1 (1977).

[32]毛其吉、左铨如,切于已知球的单形的宽度,数学研究与评论,1(1989).

[33]Oppenheim, A. Amer. Math. Monthly, 71(1964),444.

[34]Bottema O., et al., 几何不等式,单墫译,北京大学出版社.

[35]Alexander, R. The Geometry of Metric and Linear Space, Springer-Verlag, 1975.

[36]杨路、张景中,高维度量几何的两个不等式,成都科技大学学报,4(1981).

[37]杨路、张景中,关于 Alexander 的一个猜想,科学通报,27(1982).

[38]毛其吉,关于"度量加"的一个不等式,数学杂志,2(1988).

[39]苏化明,关于度量加的一个定理及一个矩阵不等式,数学研究与评论,2(1994).

[40]Bortoš, Časopis P, Pěst Mat. 93(1968).

[41]Eriksson, F. The law of sines for tetrahedra and n-simplices, Geom. Dedicata. 7(1978).

[42]蒋星耀,关于高维单形顶点角的不等式,数学年刊,8A,6(1987).

[43]刘根洪,E^n 中的正弦定理及其应用数学研究与评论,1(1989).

[44]张垚,E^n 中 S 面空间角的正弦定理及其应用,湖南教育学院学报,5(1993).
[45]尹景尧、冯渭川,关于空间角正弦的一个不等式及其应用,数学的实践与认识,3(1988).
[46]苏化明,预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件的一个应用,数学杂志,1(1987).
[47]冷岗松,高维单形二面角的正弦定理及平分面的两个不等式,数学研究与评论,1(1994).
[48]苏化明,关于单形的三角不等式,数学研究与评论,4(1993).
[49]苏化明,关于单形二面角平分面面积的不等式,数学杂志,3(1992).
[50]苏化明,与单形重心有关的几个几何不等式,数学季刊,1(1989).
[51]苏化明,单形内顶角的不等式及其应用,数学杂志,3(1994).
[52]冷岗松,关于 n 维单形的一个不等式,数学研究与评论,4(1990).
[53]张晗方,关于一个不等式的证明的简化与加强,数学的实践与认识,3(1990).
[54]尹景尧、冯渭川,两个不等式的推广,数学的实践与认识,4(1993).
[55]郭曙光,关于单形的一个猜想及两个不等式,扬州师范学院学报,4(1992).
[56]林祖成,关于 N 维单形的一类不等式,数学的实践与认识,2(1994).
[57]周加农,共球诸点相互距离之间的一个不等式,科学通报,14(1988).
[58]杨世国,共超球质点系的一个结果及其应用,数学杂志,1(1994).
[59]周加农,伪对称集的一个充分必要条件,数学研究与评论,1(1990).
[60]杨世国,球面型空间中伪对称集的两个几何特征与有关的一个几何不等式,数学杂志,4(1992).
[61]左铨如、毛其吉,关于伪对称集的一个注记,科学通报,19(1987).
[62]刘立、周加农,一个经典不等式的高维推广,数学季刊,2(1988).
[63]苏化明,共球有限点集的一类几何不等式,数学年刊,1(1994).
[64]单墫,几何不等式,上海教育出版社,1980.
[65]陈计,专著《几何不等式新进展》的补遗(Ⅰ),宁波大学学报,2(1991).
[66]G. H. 哈代等著,不等式,科学出版社.
[67]Beckenbach,E. F., Bellman,R. Inequalities, Springer-Verlag, 1961.

杨路-张景中不等式的若干推论

左铨如

扬州大学师范学院数学与计算机科学系(江苏,225002)

杨路-张景中不等式(简称"杨-张不等式"),是具有极广泛应用价值的一类与质点组有关的不等式[1,2].

设 $\mathfrak{S}=\{A_i(m_i),i=0,1,\cdots,N\}$ 是 $E^n(n\leqslant N)$ 中的质点组,m_i 是点 A_i 所赋有的质量. $\mathfrak{S}$ 中任意 $k+1$ 个点 $A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$ 所支撑的单形的 k 维体积记为 $V_{i_0i_1\cdots i_k}$,令

$$M_k=\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\sum\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0i_1\cdots i_k}\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

$$M_0=m_0+m_1+\cdots+m_N\neq 0,$$

则有如下的杨-张不等式:

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[(n-l)!\ (l!)^3]^k}{[(n-k)!\ (k!)^3]^l}(n!\ M_0)^{l-k}\quad(1\leqslant k<l\leqslant n,m_i\geqslant 0);\tag{1}$$

$$M_k^2\geqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\cdot\frac{n-k+1}{n-k}\cdot M_{k-1}M_{k+1}\quad(1\leqslant k\leqslant n,m_i\text{ 可正可负}).\tag{2}$$

式中等号当且仅当 φ 关于其质心的惯量椭球面是一个球面时成立.

如果 $\mathfrak{S}$ 不是有限质点组而是某个具有有限质量的区域,设质量分布函数为 $m(x)\quad(x\in\mathfrak{S})$,则可定义

$$M_k = \frac{1}{k!}\iint\cdots\int m(x_0)m(x_1)\cdots m(x_k)V^2(x_0,x_1,\cdots,$$
$$x_k)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k,$$

$$M_0 = \int m(x)\mathrm{d}x.$$

不等式(1)、(2)仍成立.

下面举例说明杨-张不等式在 n 维单形方面的应用,可得到形形色色的几何不等式.

在(1)中取 $l=n,k=n-1,N=n,m_i=\lambda_i V_i^s>0,V_i$ 是 n 维单形 $A_0A_1\cdots A_n$ 中顶点 A_i 所对的"侧面"的$(n-1)$维体积,则有

$$\prod_{i=0}^{n}\lambda_i V_i^s\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\lambda_j}V_j^{2-s}\right)^n \geqslant \frac{n^{3n}}{n!^2}V^{2(n-1)}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i V_i^s. \tag{3}$$

在(3)中取 $\lambda_i=1,s=2$,得[2]

$$V^{2(n-1)}\leqslant\frac{(n+1)^n(n!)^2\prod V_i^2}{n^{3n}\sum V_i^2}; \tag{4}$$

$$V^{2(n-1)}\leqslant\frac{(n+1)^{n-1}(n!)^2}{n^{3n}}\cdot\prod_{i=0}^{n}V_i^{\frac{2n}{n+1}}. \tag{5}$$

式中等号当且仅当单形为正则单形时成立.

运用巴尔托斯(Bartoš)有关单形的体积公式

$$V=\frac{1}{n}\left[(n-1)!\ V_0V_1\cdots V_{i-1}V_{i+1}\cdots V_n\sin\angle A_i^{(n)}\right]^{\frac{1}{n-1}},$$

而将

$$V_i=\frac{(n-1)!\ \prod V_j}{(nV)^{n-1}}\sin\angle A_i^{(n)}$$

代入(3)式右端可得有关单形顶点角$\angle A_i^{(n)}$的不等式:

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\sin^s\angle A_i^{(n)}\leqslant\frac{(n!)^{2-s}\left(\prod\lambda_i\right)\left(\sum V_j^{2-s}/\lambda_j\right)^n}{n^{(3-s)n}V^{(2-s)(n-1)}}. \tag{6}$$

式中 λ_i 为正实数.

特别地,在(6)式中取 $\lambda_i=1,S=2$,得[3]

$$\sum_{i=0}^{n}\sin^2\angle A_i^{(n)}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{7}$$

式中等号成立的充要条件是单形为正则的.

(7)式是蒋星耀于 1987 年证明的，由它亦可得(4)、(5)式. 由(5)式运用数学归纳法易证有关单形的棱长 ρ_{ij} 与体积 V 的不等式：

$$n!\ V\leqslant\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}, \tag{8}$$

式中等号当且仅当单形为正则时成立.

(8)式是 1970 年 D. Veljan 提出的猜测，1974 年被 Korchmaros 证实. 此式亦可由单形的外接球半径的公式

$$R^2=\left|\det\left(-\frac{1}{2}\rho_{ij}^2\right)\right|\Big/(n!\ V)^2,$$

以及不等式

$$\sum_{i<j}m_im_j\rho_{ij}^2\leqslant\left(\sum_0^n m_i\right)^2R^2, \tag{9}$$

式中等号成立的充要条件是单形的外心 O 与其质心 $G=\sum_0^n m_iA_i\Big/\sum_0^n m_i$ 重合. 并运用不等式[4]

$$\left|\det\left(-\frac{1}{2}\rho_{ij}^2\right)\right|\leqslant\frac{n}{2^{n-1}}\prod_{i<j}\rho_{ij}^{\frac{4}{n}}, \tag{10}$$

式中等号成立的充要条件是所有的 $\rho_{ij}/\rho_{0i}\rho_{0j}(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 都相等. 从而可以得到较(8)式更强的不等式

$$(n!\ V)^2\leqslant\frac{n+1}{2^n}\prod_{i<j}\rho_{ij}^{4/n}\cdot C_{n+1}^2\Big/\sum_{i<j}\rho_{ij}^2. \tag{11}$$

又在(1)中取 $l=n-1,k=1$，则有

$$\left(\sum_{i<j}m_im_j\rho_{ij}^2\right)^{n-1}\geqslant(n-1)!^2n^{n-2}\left(\sum_0^n m_i\right)^{n-2}\left(\sum_0^n\frac{1}{m_i}V_i^2\right)\prod_0^n m_i.$$

将高维正弦公式

$$\frac{V_i}{\sin A_i}=\frac{(2R)^{n-1}}{(n-1)!},$$

设单形的内切球半径为 r，侧面 f_i 上的高线长为 h_i，将关系

$$r\sum_{i=0}^{n}V_i=nV,\qquad V_ih_i=nV$$

分别代入(5)式，可依次得[2]

$$r\leqslant\left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{2n}}V^{\frac{1}{n}},\tag{12}$$

$$V\geqslant\frac{1}{n!}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\prod_{i=0}^{n}h_i^{\frac{n}{n+1}}.\tag{13}$$

式中当且仅当单形为正则时等号成立.

若在不等式(2)中取 $n=2,N=3$，三角形 $A_0A_1A_2$ 的三条边长 a、b、c，其面积为$\triangle$，则对于任意实数 λ、μ、γ，有[2]

$$(\lambda a^2+\mu b^2+\gamma c^2)^2\geqslant16(\lambda\mu+\mu\gamma+\gamma\lambda)\triangle^2.\tag{14}$$

因此，得 Pedoe 不等式：

$$a^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2)+b^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$$
$$\geqslant16\triangle\triangle_1.$$

设单形$\{A_i(m_i),i=0,1,\cdots,n\}$的任意两个顶点 A_i、A_j 所对侧面 f_i 与 f_j 所夹的内二面角为 θ_{ij}，$f_i\cap f_j$ 为$\{A_i\}$的 $n-2$ 维子单形，其 $n-2$ 维体积为 V_{ij}. 在不等式(2)中取 $k=n-1$，得

$$\left(\sum_{i=0}^{n}m_i^{-1}V_i^2\right)^2\geqslant2\left(\frac{n}{n-1}\right)^3V^2\sum_{i<j}m_i^{-1}m_j^{-1}V_{ij}^2,$$

再取 $m_i^{-1}=x_iV_i^{-2}$，将公式

$$\sin\theta_{ij}=\frac{nVV_{ij}}{(n-1)V_iV_j}$$

代入，得

$$\sum_{i<j}x_ix_j\sin^2\theta_{ij}\leqslant\frac{n-1}{2n}\left(\sum x_i\right)^2.\tag{15}$$

设单形$\{A_i\}$内一点M到侧面f_i的距离为r_i，则

$$\sum_{i=0}^{n} V_i r_i = nV.$$

在(3)式中取$s=1$，$\lambda_i = r_i^{-1}$，得

$$V^2 \geqslant \frac{n^n}{n!^2}(nV)^n \prod_{i=0}^{n}(r_i V_i^{-1}) \sum_{j=0}^{n} V_j / r_j.$$

其中

$$\sin^2 A_i = -\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ 1 & & \\ \vdots & -\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}\angle A_j O A_k & \\ 1 & & \end{vmatrix}$$

$(0 \leqslant i, j, k \leqslant n, j, k \neq i)$
(O 为$\{A_i\}$的外心)

以及(9)式代入可得类似(7)式的不等式

$$\sum \frac{1}{m_i}\sin^2 A_i \leqslant \left(\sum_{0}^{n} m_i\right)^n \Big/ 4(4n)^{n-2}\prod_{0}^{n} m_i. \qquad (7')$$

运用 Maclaurin 不等式和 Cauchy 不等式，分别有

$$\left(\frac{nV}{n+1}\right)^n = \left(\frac{\sum V_i r_i}{n+1}\right)^n \geqslant \prod V_i r_i \sum \frac{1}{V_i r_i} \Big/ (n+1),$$

$$\sum \frac{1}{V_i r_i} \sum \frac{V_j}{r_j} \geqslant \left(\sum \frac{1}{r_i}\right)^2.$$

故有[5]

$$V \geqslant \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}{n!} \prod_{i=0}^{n} r_i \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{r_j}. \qquad (16)$$

当$r_0 = r_1 = \cdots = r_n$（点M为单形的内心）时，即得(12)式.

在上述16个不等式的基础上，还可以导出许多不等式. 杨-张不等式先由杨路、张景中提出[1]，后经他们加以推广[2]，其全部推导过程被 D. S. Mitrinović译成英文载入其专著《几何不等式的新进展》(Recent advances in geometric inequalities, 1989).

参考文献

[1]杨路、张景中,关于有限点集的一类几何不等式,数学学报,23(1980)No.5,740—749.

[2]张景中、杨路,关于质点组的一类几何不等式,中国科学技术大学学报,11(1981)No.2,1—8.

[3]蒋星耀,关于高维单形质点角的不等式,数学年刊,8(A)(1987),668—670.

[4]杨路、张景中,一个代数定理的几何证明,中国科学技术大学学报,11(1981)No.4,127—130.

[5]苏化明,关于单形的三角不等式,数学研究与评论,13(1993)No.4,599—604.

Oppenheim 不等式推广的简单证明*

陈 计　王 振

宁波大学应用数学系(315211)
中国科学院武汉数理所(430071)

A. Oppenheim 曾建立了如下的结果[1,2]：设$\triangle A_iB_iC_i$的边长，面积，外接圆半径分别为a_i、b_i、c_i，$\triangle_i$，R_i，$i=1,2$. 则以

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2}=a,\sqrt{b_1^2+b_2^2}=b,\sqrt{c_1^2+c_2^2}=c$$

为边长的$\triangle ABC$的面积$\triangle$与外接圆半径R分别满足

$$\triangle\geqslant\triangle_1+\triangle_2, \tag{1}$$

和

$$R^2\leqslant R_1^2+R_2^2. \tag{2}$$

1974 年，Oppenheim[2] 把(1)推广到圆内接凸n边形；1981 年，杨路与张景中[3,4] 把(1)和(2)推广到n维空间的单形.

本文中，我们将分别给出上述三个推广的简单证明.

1. 不等式(1)的多边形推广

引理 1[5]　设平面凸n边形$A_1A_2\cdots A_n$的面积为F，各边长$A_1A_2=a_1$，$A_2A_3=a_2$，$\cdots$，$A_nA_1=a_n$；再设实数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(0,\pi)$，且$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\pi$，则

---

* 本文发表在《数学研究与评论》1(1996)，收稿日期：1993 年 5 月 4 日.

$$a_1^2\text{ctg}\alpha_1+a_2^2\text{ctg}\alpha_2+\cdots+a_n^2\text{ctg}\alpha_n\geqslant 4F, \tag{3}$$

等号成立当且仅当此 n 边形内接于圆，且

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1}=\frac{a_2}{\sin\alpha_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\alpha_n}=2R$$

R 为圆半径.

定理 1[2]　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n,F_1$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n,F_2$ 分别是凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 的边长和面积. 则以

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}=c_1,\sqrt{a_2^2+b_2^2}=c_2,\cdots,\sqrt{a_n^2+b_n^2}=c_n$$

为边长的圆内接 n 边形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的面积 F 满足不等式

$$F\geqslant F_1+F_2, \tag{4}$$

等号成立当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 是相似的圆内接凸 n 边形.

证明　将不等式(3)分别用于凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$，得

$$a_1^2\text{ctg}\alpha_1+a_2^2\text{ctg}\alpha_2+\cdots+a_n^2\text{ctg}\alpha_n\geqslant 4F_1,$$

和

$$b_1^2\text{ctg}\alpha_1+b_2^2\text{ctg}\alpha_2+\cdots+b_n^2\text{ctg}\alpha_n\geqslant 4F_2.$$

现将上面两式的两边分别相加，得

$$c_1^2\text{ctg}\alpha_1+c_2^2\text{ctg}\alpha_2+\cdots+c_n^2\text{ctg}\alpha_n\geqslant 4(F_1+F_2); \tag{5}$$

再令

$$\sin\alpha_i=\frac{c_i}{2R},i=1,2,\cdots,n,$$

其中 R 为凸 n 边形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的外接圆半径，则(5)的左边 $=4F$，所以

$$F\geqslant F_1+F_2,$$

等号成立当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 与 $B_1B_2\cdots B_n$ 为相似的圆内接凸 n 边形.

2. 不等式(1)的高维推广

引理 2[6] 若 B、C 是 n 维单形，$V(B)$，$V(C)$分别表示 B，C 的体积. 设 A 的顶点是 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$；$B$ 的顶点是 $B_1, B_2, \cdots, B_{n+1}$，且 $b_{ij} = |\overline{B_iB_j}|$，$C_{ij} = |\overline{C_iC_j}|$. 用 S_i 来表示$(C_1, C_2, \cdots, C_{n+1})/C_i$ 所成的 $n-1$ 维单形的面积，θ_{ij}表示 S_i 与 S_j 的夹角，则有不等式

$$\sum_{i<j} b_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^3 V(B)^{\frac{2}{n}} V(C)^{2-\frac{2}{n}}, \tag{6}$$

等号成立当且仅当两个单形对应相似.

定理 2[3] 设 n 维单形 A 与 B 的棱长及体积分别为 a_{ij}，$V(A)$ 与 b_{ij}，$V(B)$，$1 \leqslant i < j \leqslant n+1$. 则以

$$\sqrt{a_{ij}^2 + b_{ij}^2} = c_{ij} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$$

为棱长的 n 维单形 $C_1C_2\cdots C_{n+1}$的体积 $V(C)$满足不等式

$$V(C)^{\frac{2}{n}} \geqslant V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}}, \tag{7}$$

等号成立当且仅当单形 A 与 B 对应相似.

证明 将单形 A 代替引理 2 中的 B，得

$$\sum_{i<j} a_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} \geqslant n^3 V(A)^{\frac{2}{n}} V(C)^{2-\frac{2}{n}}. \tag{8}$$

将(8)与(6)相加，得

$$\begin{aligned} & n^3 V(C)^{2-\frac{2}{n}} \left[V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}} \right] \\ \leqslant & \sum_{i<j} C_{ij}^2 S_i S_j \cos\theta_{ij} = n^3 V(C)^2, \end{aligned} \tag{9}$$

两边同除 $n^3 V(C)^{2-\frac{2}{n}}$，即得

$$V(A)^{\frac{2}{n}} + V(B)^{\frac{2}{n}} \leqslant V(C)^{\frac{2}{n}},$$

等号成立当且仅当 $A \backsim C$ 且 $B \backsim C$，即 $A \backsim B$.

3. 不等式(2)的高维推广

引理 3[7] 设 n 维单形 P 的外接球半径及棱长分别为 R 和 ρ_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant n+1)$，则对满足

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n+1}=1$$

的实数 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n+1)$有

$$R^2=\operatorname*{Max}_{\sum\lambda_i=1}\left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\rho_{ij}^2\right). \tag{10}$$

定理 3[4] 设三个 n 维单形 A,B,C 的定义同定理 2;用 R_1, R_2, R 分别表示它们外接球的半径,则有

$$R^2\leqslant R_1^2+R_2^2. \tag{11}$$

证明 将(10)分别用于单形 A 和 B,得

$$R_1^2\geqslant\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j a_{ij}^2,$$

及

$$R_2^2\geqslant\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j b_{ij}^2.$$

两式相加,得

$$R_1^2+R_2^2\geqslant\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j(a_{ij}^2+b_{ij}^2)=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j c_{ij}^2. \tag{12}$$

所以

$$R_1^2+R_2^2\geqslant\operatorname*{Max}_{\sum\lambda_i=1}\left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j c_{ij}^2\right)=R^2.$$

证毕.

参考文献

[1]A. Oppenheim, Problem 5092, Amer. Math. Monthly, 70(1963),444 and 71(1964),444.

[2]A. Oppenheim, Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Fiz., No. 461—497(1974),257—263.

[3]杨路、张景中,关于 Alexander 的一个猜想,科学通报,1981 年第 1 期,1～3.

[4]杨路、张景中,高维度量几何的两个不等式,成都科技大学学报,1981 年

第1期,63~70.

[5] 杨学枝,问题43的评注(IV). 数学通讯,1991年第6期,41.

[6] 杨路、张景中,Neuberg-Pedoe不等式的高维推广及其应用,数学学报,1981年第3期,401~412.

[7] M. S. Klamkin, An identity for simplexes and related inequalities, Simon Stevin, 48(1974—1975),57—61.

[8] 王振、陈计,从一道普特南竞赛题谈起,数学竞赛(18),湖南教育出版社,1994年4月第一版,27—32.

n 维单形中的三个含参数的几何不等式

张　垚

湖南教育学院数学系(长沙,410012)

本文中证明了 n 维单形中三个含参数的几何不等式,并利用它们导出了 n 维单形中一系列涉及体积和特殊线段长度的几何不等式,此外,还提出了 4 个新的猜想.

§1　记号与引理

设 E^n 中 n 维单形 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$,以 $\{A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{n+1}\}(i=1,2,\cdots,n+1)$ 为顶点集的 $n-1$ 维单形 $\overline{f_i}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的"侧面"(下文中 $\overline{f_i}$ 所在的 $n-1$ 维超平面也记为 $\overline{f_i}$),"侧面" $\overline{f_i}$ 的 $n-1$ 维体积记为 $|\overline{f_i}|$. 从 E^n 中任意一点 P 向超平面 $\overline{f_1},\overline{f_2},\cdots,\overline{f_{n+1}}$ 作垂线,垂足分别是 $H_1,H_2,\cdots,H_{n-1}$,则称以 $\{H_1,H_2,\cdots,H_{n-1}\}$ 为顶点集的 n 维单形 $\mathscr{A}_P$(假设 $H_1,\cdots,H_{n+1}$ 不共面)为 P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂足单形,这时也称 $\mathscr{A}$ 是 P 关于 $\mathscr{A}_P$ 的垂面单形. $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}_P$ 的 n 维体积分别记为 $|V(\mathscr{A})|$ 和 $|V(\mathscr{A}_P)|$.

定义 1　设 $\overline{PA_1},\overline{PA_2},\cdots,\overline{PA_n}$ 是从 E^n 中点 P 出发的 $n+1$ 个向量,$\overline{e}_1,\overline{e}_2,\cdots,\overline{e}_n$ 分别是 $\overline{PA_1},\overline{PA_2},\cdots,\overline{PA_n}$ 上的单位向量,则称

$$\alpha = \arcsin|\det(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_n)| \tag{1.1}$$

为 n 个向量 $\overline{PA}_1,\overline{PA}_2,\cdots,\overline{PA}_n$ 构成的空间角. 特别当 $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\cdots,\bar{e}_{n+1}$ 是 n 维单形的 $n+1$ 个侧面 $f_1,f_2,\cdots,f_{n+1}$ 的单位法向量时, $\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{i-1},\bar{e}_{i+1},\cdots,\bar{e}_{n+1}$ 所构成的空间角

$$\alpha_i = |\det(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{i-1},\bar{e}_{i+1},\cdots,\bar{e}_{n+1})| \quad (i=1,2,\cdots,n+1)$$

就是[1]中定义的 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的顶点 A_i 所对应的顶点角.

引理 1[1] n 维单形 $\mathscr{A}$ 的体积 $V(\mathscr{A})$、"侧面"体积 $|f_i|$ 及顶点角 α_i 满足

$$\sin\alpha_i = (n|V(\mathscr{A})|)^{n-1} \Big/ \left((n-1)!\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}|f_j|\right) \quad (i=1,2,\cdots,n+1). \tag{1.2}$$

引理 2[2,3] n 维单形 $\mathscr{A}$ 的诸顶点角 α_i 及 $n-1$ 个非负实数 $x_i\left(i=1,2,\cdots,n+1,\sum_{i=1}^{n+1}x_i\neq 0\right)$ 之间满足不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\alpha_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n \Big/ n^n. \tag{1.3}$$

且(1.3)中等号成立的充要条件是下列诸等式都成立:

$$\frac{x_k}{\sum_{i=1}^{n+1}x_i} = \frac{\cos\varphi_{ij}}{n(\cos\varphi_{ij}+\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj})}, \quad i,j,k=1,2,\cdots,n+1; \tag{1.4}$$

其中 i,j,k 互不相同, $\varphi_{ij}=\widehat{f_i,f_j}$ 是 $\mathscr{A}$ 的两侧面所夹的内二面角. 且适当规定 f_i 的法线方向后, 使

$$\varphi_{ij}=\pi-\widehat{\bar{e}_i,\bar{e}_j} \quad (i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

引理 3[2,3] 设 E^n 中一点 P 关于坐标单形 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的规范重心坐标为 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$, P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂足单形为 $\mathscr{A}_P=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$, 又 H_i 关于 $\mathscr{A}$ 的规范重心坐标为 $(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{i,n+1})(i=1,2,\cdots,n+1)$. 那么

$$t_{ij}=\begin{cases}0, & i=j;\\ \dfrac{\lambda_j|\overline{f_i}|+\lambda_i|\overline{f_j}|\cos\varphi_{ij}}{|\overline{f_i}|}, & i\neq j.\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n+1)\tag{1.5}$$

其中 $\varphi_{ij}=\widehat{\overline{f_i},\overline{f_j}}$ 是 $\mathscr{A}$ 的内二面角.

引理 2 和 3 首先在[2]中出现，发表时证明已删去，其证明见[3]或本书 p. 385 引理 2.

引理 4 设 E^n 中任意一点 P 关于 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的垂足单形是 $\mathscr{A}_P=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$. 若 P 是 $\mathscr{A}_P$ 的重心或外心，则 $\mathscr{A}_P$ 是正则单形的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

证明 必要性显然. 下证充分性. 因为 $\mathscr{A}$ 是正则单形. 所以 $\mathscr{A}$ 的各“侧面”体积相等：

$$|\overline{f_1}|=|\overline{f_2}|=\cdots=|\overline{f_{n+1}}|.$$

又由高维余弦定理[6]知 $\mathscr{A}$ 的各内二面角 φ_{ij} 都等于

$$\arccos\frac{1}{n}(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

设 P 关于 $\mathscr{A}$ 的规范重心坐标为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$，$H_i$ 关于 $\mathscr{A}$ 的规范重心坐标为$(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{i,n+1})$，则由引理 3 有

$$t_{ij}=\begin{cases}0, & i=j;\\ \lambda_j+\dfrac{1}{n}\lambda_i, & i\neq j.\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n+1)\tag{1.6}$$

如果 P 是 $\mathscr{A}_P$ 的重心，那么

$$\begin{aligned}\lambda_j&=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}t_{ij}=\frac{1}{n+1}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+1}\left(\lambda_j+\frac{1}{n}\lambda_i\right)\\ &=\frac{1}{n+1}\left[n\lambda_j+\frac{1}{n}(1-\lambda_j)\right].\end{aligned}$$

由此可解出

$$\lambda_j=\frac{1}{n+1}(j=1,2,\cdots,n+1),$$

即 P 也是 $\mathscr{A}$ 的重心，由(1.6)得 H_i 关于 $\mathscr{A}$ 的规范重心坐标为 $(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n},\overset{(i)}{0},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$，于是由分点坐标公式[6]易知 $A_i,P,H_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 共线且 $|A_iP|:|PH_i|=n$，故 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{A}_P$ 成位似，位似中心为 P，所以 $\mathscr{A}_P$ 也是正则单形.

如果 P 是 $\mathscr{A}_P$ 的外心，即

$$|\overline{PH_1}|=|\overline{PH_2}|=\cdots=|\overline{PH_{n+1}}|,$$

又因为

$$|\overline{f_1}|=|\overline{f_2}|=\cdots=|\overline{f_{n+1}}|,$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_{n+1}&=\frac{1}{n}|\overline{PH_1}|\cdot|\overline{f_1}|:\frac{1}{n}|\overline{PH_2}|\cdot|\overline{f_2}|:\cdots:\\&\quad\frac{1}{n}|\overline{PH_{n+1}}|\cdot|\overline{f_{n+1}}|\\&=1:1:\cdots:1.\end{aligned}$$

即 P 也是 $\mathscr{A}$ 的重心，由上面证明知这时 $\mathscr{A}_P$ 也为正则单形. 证毕.

引理5 设 P 是 E^n 中 n 维单形 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}\}$ 内任意一点，$\overline{PB_1},\overline{PB_2},\cdots,\overline{PB_{i-1}},\overline{PB_{i+1}},\cdots,\overline{PB_{n+1}}$ 构成的空间角为 $\theta_i(i=1,2,\cdots,n+1)$，则对任意 $n+1$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ $\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\neq 0\right)$ 有下列不等式成立：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin\theta_i&\leqslant\frac{1}{n^{n/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}x_j\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{1}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n.\end{aligned}\qquad(1.6)$$

且(1.6)中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 P 关于 $\mathscr{B}$ 的垂面单形 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 是正则单形.

证明 因 $\mathscr{A}$ 是 P 关于 $\mathscr{B}$ 的垂面单形，即 $\mathscr{B}$ 是 P 关于 $\mathscr{A}$

的垂足单形，故由定义 1 知 θ_i 就是单形 $\mathscr{A}$ 中对应于顶点 A_i 的顶点角，于是由引理 2，得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\theta_i\leqslant\frac{1}{n^n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n. \tag{1.7}$$

应用 Cauchy 不等式，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin\theta_i&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\theta_i\right)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant\frac{1}{n^{n/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

而由 Maclaurin 不等式[5]，有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n+1}x_i}{\binom{n+1}{1}}\geqslant\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)}{\binom{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{n}},$$

等号当且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 时成立，即

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n. \tag{1.9}$$

由(1.8)、(1.9)即得(1.6)。若(1.6)中等号成立，则(1.8)、(1.9)中等号都成立，而由 Cauchy 不等式中等号成立条件及(1.9)中等号成立条件，得

$$x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}\text{ 且 }\sin\theta_1=\sin\theta_2=\cdots=\sin\theta_n.$$

由(1.4)，使得

$$\frac{1}{n+1}=\frac{\cos\varphi_{ij}}{n(\cos\varphi_{ij}+\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj})}\quad(\varphi_{ij}\text{是 }\mathscr{A}\text{ 的内二面角}),$$

即 $\cos\varphi_{ij}=n\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj}$（$i,j,k$ 互不相等且 $i,j,k=1,2,\cdots,n+1$）。于是由[4]中定理 2 知 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

反之，若 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $\mathscr{A}$ 为正则单形，则由高维余弦

定理' 得 $\cos\varphi_i=\frac{1}{n}$，直接计算有

$$\sin^n\theta_i=|\det[(e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_{n+1})^T(e_1,\cdots,e_{i-1},e_{i+1},\cdots,e_{n+1})]|$$

$$=\det\begin{vmatrix} 1 & & & \frac{1}{n} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{n} & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (i=1,2,\cdots,n+1).$$

从而(1.6)中等号成立.

§2 主要结论

定理1 E^n 中任意一点 P 关于坐标单形 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$的规范重心坐标为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$，$P$ 关于 $\mathscr{A}$ 的垂足单形为 $\mathscr{A}_P=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$，又 $\mathscr{A}$ 的体积为$|V(\mathscr{A})|$，"侧面"体积为$|f_i|$，高为$h_i(i=1,2,\cdots,n+1)$，则对任意 $n+1$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\neq 0\right)$，有下列不等式成立：

$$(1)\ |V(\mathscr{A})|\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i|\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x_j}{|PA_j|}\right)$$

$$\leqslant\frac{}{n!\,n^{n/2}}\frac{1}{(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n; \qquad (2.1)$$

$$(2)\ |V(\mathscr{A})|^{n-1}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\frac{x_j}{|f_j|}\right)\leqslant\frac{}{n^{5n/2}}\frac{n!}{(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n;$$

$$(2.2)$$

$$(3)\ |V(\mathscr{A})| \geqslant \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}{n!} \sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} x_j h_j\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^n, \tag{2.3}$$

且(2.1)中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂面单形 $\mathscr{B}$ 为正则单形，而(2.2)、(2.3)中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 且 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

说明 设 $\overline{PA}_1,\cdots,\overline{PA}_{i-1},\overline{PA}_{i+1},\cdots,\overline{PA}_{n+1}$ 构成的空间角为 θ_i $(i=1,2,\cdots,n+1)$，$\overline{PA}_i$ 上的单位向量为 $\bar{e}_i$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$，则由引理 5，得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} x_j\right)\sin\theta_i \leqslant \frac{1}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^n. \tag{2.4}$$

而由规范重心坐标的定义及单形体积公式，知

$$\begin{aligned}|\lambda_i||V(\mathscr{A})| &= \frac{1}{n!}|\det(\overline{PA}_1,\cdots,\overline{PA}_{i-1},\overline{PA}_{i+1},\cdots,\overline{PA}_{n+1})| \\ &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}|\overline{PA}_j|\right)|\det(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{i-1},\bar{e}_{i+1},\cdots,\bar{e}_{n+1})| \\ &= \frac{1}{n!}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}|\overline{PA}_j|\right)\sin\theta_i.\end{aligned}$$

将上式代入(2.4)即得(2.1)，且由引理 5 知(2.1)中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$，且 P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂面单形为正则单形.

设 $\mathscr{A}$ 中对应于顶点 A_i 的顶点角为 α_i $(i=1,2,\cdots,n+1)$，则由引理 5，有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1} x_j\right)\sin\alpha_i \leqslant \frac{1}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} x_i\right)^n. \tag{2.5}$$

而由引理 1，有

$$\sin\alpha_i=\frac{(n!|V(\mathscr{A})|)^{n-1}}{(n-1)!\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}|\overline{f_j}|}\qquad(i=1,2,\cdots,n+1).\tag{2.6}$$

将(2.6)代入(2.5)整理后即得(2.2)，再利用

$$|\overline{f_i}|=\frac{n!|V(\mathscr{A})|}{h_i}$$

代入(2.2)即得(2.3). 且由引理5知(2.2)、(2.3)中等号成立的充要条件是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$，且 $\mathscr{A}$ 为正则单形. 证毕.

注：在(2.2)中令 $x_i=1$，并利用平均值不等式，使得

$$|V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{(n!)^{1/(n-1)}(n+1)^{(n+1)/2(n-1)}}{n^{3n/2(n-1)}}\left(\frac{\prod\limits_{i=1}^{n+1}|\overline{f_i}|}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}|\overline{f_i}|}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\leqslant\sqrt{n+1}\left(\frac{n!^2}{n^{3n}}\right)^{1/2(n-1)}\left(\prod_{i=1}^{n+1}|\overline{f_i}|\right)^{n/(n^2-1)}\tag{2.7}$$

且(2.7)中等号成立当且仅当 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

上述结论改进了[7]的相应结论.

定理2 P 为 n 维单形 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 内任意一点，P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂足单形为 $\mathscr{A}_P=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$，则有下列不等式成立：

$$\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}{n!}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}|\overline{PH_j}|\right)\leqslant|V(\mathscr{A})|$$

$$\leqslant\frac{1}{n!}\frac{1}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}|\overline{PA_i}|\right)^n$$

$$\leqslant\frac{1}{n^{n(n-1)}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}\frac{|\overline{PA_i}|}{|\overline{PH_i}|}\right)^n|V(\mathscr{A})|,\tag{2.8}$$

且(2.8)中诸等号成立的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为正则单形，且 P 为 $\mathscr{A}$ 的中心.

证明 在(2.1)中令 $x_i=|\overline{PA_i}|(i=1,2,\cdots,n+1)$，并利用

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\lambda_i| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\right| = 1, \tag{2.9}$$

便得

$$V(\mathscr{A}) \leqslant \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}|\overline{PA_i}|\right)^n, \tag{2.10}$$

且(2.10)中等号成立的充要条件是 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n+1)$, $|\overline{PA_1}|=|\overline{PA_2}|=\cdots=|\overline{PA_{n+1}}|$,及 P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂面单形 $\mathscr{B}$ 为正则单形,即 P 在 $\mathscr{A}$ 内,P 为 $\mathscr{A}$ 的外心,且 P 关于 $\mathscr{A}$ 的垂面单形 $\mathscr{B}$ 为正则单形,而由引理 4 知这等价于 $\mathscr{A}$ 为正则单形且 P 为 $\mathscr{A}$ 的中心.

其次,设以 $\{A_1,\cdots,A_{i-1},P,A_{i+1},\cdots,A_{n+1}\}$ 为顶点集的单形体积为 V_i,则

$$|\lambda_i||V(\mathscr{A})|=V_i=\frac{1}{n}|\overline{PH_i}||\overline{f_i}|(i=1,2,\cdots,n+1).$$

在(2.1)中令

$$x_i=nV_i=|\overline{PH_i}||\overline{f_i}|,$$

并注意到

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i=n\sum_{i=1}^{n+1}V_i=n|V(\mathscr{A})|,$$

便得

$$\frac{1}{n}\left(\prod_{i=1}^{n+1}|\overline{f_i}|\right)\prod_{i=1}^{n+1}\frac{|\overline{PH_i}|}{|\overline{PA_i}|}\sum_{i=1}^{n+1}|\overline{PA_i}|\leqslant\frac{1}{n!}\cdot\frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n-1)/2}}|V(\mathscr{A})|^n.$$

再利用(2.7),便得

$$\sum_{i=1}^{n+1}|\overline{PA_i}|\leqslant\frac{(n!)^{1/n}(n+1)^{(n-1)/2n}}{n^{(n-1)/2}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}\frac{|\overline{PA_i}|}{|\overline{PH_i}|}\right)|V(\mathscr{A})|^{1/n}. \tag{2.11}$$

且注意到 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 等价于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}$,即 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心,故由定理 1 知(2.11)中等号成立的充要条件是 P 关于

$\mathscr{A}$ 的垂面单形 $\mathscr{B}$ 为正则单形且 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心，而由引理 4 知这等价于 $\mathscr{A}$ 为正则单形且 P 为 $\mathscr{A}$ 的中心.

最后，在(2.2)中令

$$x_i=V_i=\frac{1}{n}|\overline{PH_i}||\overline{f_i}|\quad(i=1,2,\cdots,n+1),$$

并注意到

$$\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\sum_{i=1}^{n+1}V_i=|V(\mathscr{A})|,$$

便得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}|\overline{PH_j}|\Bigr)\leqslant\frac{n!}{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}|V(\mathscr{A})|,\qquad(2.12)$$

且注意到 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 等价于 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}$，即 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心，故由定理 1 知(2.12)中等号成立的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为正则单形且 P 为 $\mathscr{A}$ 的中心.

联合(2.10)，(2.11)，(2.12)便得要证结论. 证毕.

在(2.8)中若取 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心，记 $\mathscr{A}$ 的中线长为 m_i，高为 h_i，这时便有

$$|\overline{PA_i}|=\frac{n}{n+1}m_i,\ |\overline{PH_i}|=\frac{1}{n+1}h_i\ (i=1,2,\cdots,n+1).$$

代入(2.8)，便得下列推论.

推论 1 n 维单形 $\mathscr{A}$ 的体积 $|V(\mathscr{A})|$、中线长 m_i，高 h_i 之间有如下关系：

$$\begin{aligned}&\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(n+1)/2}}\sum_{i=1}^{n+1}\Bigl(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}h_j\Bigr)\\&\leqslant|V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(3n-1)/2}}\Bigl(\sum_{i=1}^{n+1}m_i\Bigr)^n\leqslant\Bigl(\prod_{i=1}^{n+1}\frac{m_i}{h_i}\Bigr)^n|V(\mathscr{A})|,\end{aligned}\qquad(2.13)$$

且(2.13)中诸等号成立的充要条件是 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

推论 2　n 维单形 $\mathscr{A}$ 的体积 $|V(\mathscr{A})|$，棱长 a_{ij}，中线长 m_i，高 h_i，外接超球半径 R，内切超球半径 r 及旁切超球半径 r_i 之间满足下列不等式：

$$(1)\ |V(\mathscr{A})|\geqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(n-1)/2}}\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}h_j\Big)$$

$$\geqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(n-1)/2}}\Big(\prod_{i=1}^{n+1}h_i\Big)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\geqslant\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{h_i}\Big)^{-n}$$

$$=\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}(n-1)^n}{n!}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{r_i}\Big)^{-n}$$

$$=\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}r^n;\tag{2.14}$$

$$(2)\ |V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(n-3)/2}}\frac{\prod_{i=1}^{n+1}m_i}{\sum_{i=1}^{n+1}m_i}$$

$$\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(n-1)/2}}\Big(\prod_{i=1}^{n+1}m_i\Big)^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{(2n-1)/2}}\Big(\sum_{i=1}^{n+1}m_i^2\Big)^{\frac{n}{2}}$$

$$=\frac{1}{n!\ n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}\Big(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}a_{ij}^2\Big)^{\frac{n}{2}}$$

$$\leqslant\frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!\ n^{n/2}}R^n;\tag{2.15}$$

$$(3)\ |V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{n^{n/2}}{n!\ (n+1)^{3(n-1)/2}}\cdot\frac{\Big(\sum_{i=1}^{n+1}m_ih_i\Big)^n}{\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}h_j\Big)};\tag{2.16}$$

$$(4)\ |V(\mathscr{A})| \leqslant \frac{n^{n/2}(n-1)^n}{n!\ (n+1)^{3(n-1)/2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n+1} m_i r_i}{r^n \sum_{i=1}^{n+1} m_i r_i}$$

$$\leqslant \frac{n^{n/2}(n-1)^n}{n!\ (n+1)^{(3n-1)/2}} \left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{m_i r_i}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}}; \qquad (2.17)$$

$$(5)\ |V(\mathscr{A})| \geqslant \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}{n!\ (n-1)^n} r^n \sum_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{h_j}{r_j} \right)$$

$$\geqslant \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n-1)/2}}{n!\ (n-1)^n} \left(\prod_{i=1}^{n+1} \frac{h_i r}{r_i} \right)^{\frac{n}{n+1}}, \qquad (2.18)$$

并且上述各不等式中等号成立的充要条件都是 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

证明 在(2.3)中令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n+1} = 1$,并利用平均值不等式便知(2.14)中前面三个不等号成立,再注意到

$$|V(\mathscr{A})| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{1}{n} r_i |\overline{f}_j| - \frac{1}{n} r_i |\overline{f}_i|$$

$$= \frac{r_i}{n} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\overline{f}_j| - 2|\overline{f}_i| \right).$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{r_i} = \frac{1}{n|V(\mathscr{A})|} \sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{n+1} |\overline{f}_j| - 2|\overline{f}_i| \right)$$

$$= \frac{(n-1)}{n|V(\mathscr{A})|} \sum_{i=1}^{n+1} |\overline{f}_i| = \frac{n-1}{r}. \qquad (2.19)$$

及

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{h_i} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|\overline{f}_i|}{h_i |\overline{f}_i|}$$

$$= \frac{1}{n|V(\mathscr{A})|} \sum_{i=1}^{n+1} |\overline{f}_i|$$

$$= \frac{1}{r}. \qquad (2.20)$$

便知(2.14)中后面两个等号成立.

在(2.1)中取 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}=1$,取 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心,并且注意到此时有 $\lambda_i=\frac{1}{n+1}$ 及 $|\overline{PA_i}|=\frac{n}{n+1}m_i$,再利用平均值不等式,便知(2.15)中前三个不等号成立,然后,利用中线长与棱长的关系式[18]

$$\sum_{i=1}^{n+1} m_i^2=\frac{n+1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} a_{ij}^2,$$

立知(2.15)中第4个等号成立.

此外,由不等式[9]:

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}^{n+1} a_{ij}^2\leqslant(n+1)^2R^2$$

知(2.15)中最后一个不等号成立.

在(2.1)中取 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心且令

$$x_i=|\overline{PA_i}|\cdot|\overline{PH_i}|=\frac{n}{(n+1)^2}m_ih_i,$$

并注意到

$$\frac{x_j}{|\overline{PA_j}|}=|\overline{PH_j}|=\frac{1}{n+1}h_j$$

便得(2.16).

在(2.1)中令 $x_i=\frac{1}{r_i}$,取 P 为 $\mathscr{A}$ 的重心,由(2.19),有

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i=\frac{n-1}{r},$$

注意到此时有

$$\lambda_i=\frac{1}{n+1},|\overline{PA_i}|=\frac{n}{n+1}m_i,$$

并利用平均值不等式便得(2.17).

最后，在(2.3)中令 $x_i=\frac{1}{r_i}$，并利用 $\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\frac{n-1}{r}$ 及平均值不等式便得(2.18).

由(2.1)及(2.3)中等号成立的充要条件及引理 4 易知，(2.14)—(2.18)中等号成立的充要条件都是 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

注：1° (2.14)是[7]中关于单形体积、高、内切超球半径之间不等式的一个改进，(2.15)则改进了作者在[8]中得到的结论，(2.16)、(2.17)、(2.18)则是新的不等式.

2° 将(2.14)—(2.18)中的任意两个反向不等式联合起来，便可得到 n 维单形中一些特殊线段长度间的不等式. 例如，由(2.14)及(2.17)可得

$$r\leqslant\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n+1}m_ir_i\right)^{\frac{1}{2(n+1)}};\qquad(2.19)$$

由(2.15)、(2.18)可得

$$\frac{R}{r}\geqslant\frac{n}{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n+1}\frac{h_i}{r_i}\right)^{\frac{1}{n+1}},\qquad(2.20)$$

并且(2.19)、(2.20)中等号成立的充要条件都是 $\mathscr{A}$ 为正则单形.

因限于篇幅，其他不等式不再一一列出.

最后，我们提出下列几个猜想，供大家研究.

猜想 记号同定理 2. 则有

(1) $$|V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{n^{n/2}(n-1)^n}{n!\,(n+1)^{(n-1)/2}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}r_i\right)^{\frac{n}{n+1}};\qquad(2.21)$$

(2) $$\prod_{i=1}^{n+1}r_i\leqslant\frac{1}{(n-1)^{n+1}}\prod_{i=1}^{n+1}m_i;\qquad(2.22)$$

(3) $$\prod_{i=1}^{n+1}m_i\leqslant\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{(n+1)/2}\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}a_{ij}\right)^{\frac{2}{n}};\qquad(2.23)$$

(4) 若 n 维单形 $\mathscr{A}$ 中有且只有一条棱长 $|\overline{A_1A_2}|>1$，则

$$|V(\mathscr{A})|\leqslant\frac{1}{2^{n/2}(n-1)!\,\sqrt{n-1}},\qquad(2.24)$$

并且(2.21)—(2.23)中等号成立的充要条件是$\mathscr{A}$为正则单形，(2.24)中等号成立的充要条件是$\mathscr{A}_1=\{A_2,A_3,\cdots,A_{n+1}\}$及$\mathscr{A}_2=\{A_1,A_3,\cdots,A_{n+1}\}$是两个棱长为1的$n-1$维正则单形，且$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2$所在的超平面互相垂直.

在[10]中(6.27)证明了$n=2$时(2.21)成立，(2.24)是在[12]、[13]中提出的猜想，且当$n=2$和3时，(2.24)是成立的.其他情形下，上述几个猜想是否成立，希望得到证实或否定.

参考文献

[1]F. Eriksson, The law of sines for tetrahedra and n-Simplices, Geometriae deticate, 7(1978),71—78.

[2]张垚,关于垂足单形的一个猜想,系统科学与数学,12(4)(1992),371—375.

[3]张垚,关于垂足单形体积的一个猜想,娄底师专学报(自),4(1992),1—8.

[4]张垚,E^n中S面空间角的正弦定理及应用,湖南教育学院学报,Vol.11,No.5(1993),101—107.

[5]G.H. Hardy, J.E. Littlewood. and Polya, Ineguality, Cambrige 2nded (1952).

[6]杨路、张景中,关于有限点集的一类几何不等式,数学学报,23(5)(1980),740—749.

[7]张景中、杨路,关于质点组的一类几何不等式,中国科技大学学报,11(2)(1981),1—8.

[8]张垚,涉及单形中线长的两个几何不等式,湖南教育学院学报,Vol.12,No.5(1994),99—103.

[9]张垚,n维单形中的距离公式和距离不等式,湖南教育学院自然科学学报,Vol.6,No.1(1988),23—30.

[10]O. Bottema, Geometric Inequatity(中译本,单墫译),北京大学出版社,1991,78.

[11]A. Sanyal, Mediaus of a simplen, Amer. Math. Monthly 74(1967),967—698.

[12]张垚.n维单形中的体积公式和体积不等式.数学竞赛(6),湖南教育出版社,1988,57—68.

[13]Zhang Yao. The Formulas and Inequalities for the Volumes of n-Simplex. Mathematical Olympiad in China, Hunan Education Publishing House.6(1990), 126—152.

与伪对称集有关的一个几何不等式及其应用

杨世国

安徽教育学院数学系(合肥,230061)

1.引　言

近期,杨路与张景中教授在[1]中提出了伪对称集的重要概念:

定义　设σ是n维欧氏空间E^n的一点集,称σ是E^n-伪对称集,若σ的凸包是n维的,且

(i)　σ中所有的点都分布在E^n中的某一球面S^{n-1}上;

(ii)　球面S^{n-1}的中心O恰为集σ的重心;

(iii)　σ关于O的惯量椭球是一个球.

在这里我们约定:当σ是伪对称集时,把σ所在的球面S^{n-1}的中心O与半径R分别称为σ的中心与半径.

有了伪对称集的概念,[1]中建立了与伪对称有关的一个几何不等式,随后,[2]、[3]中分别给出与伪对称集有关的另外两个几何不等式.本文建立了与伪对称集有关的又一个几何不等式,并应用它获得E^n中超曲面的一个几何不等式,此不等式中等号成立的条件是E^n中超球面区别于其他超曲面的一个特征.

为了叙述方便起见,我们引进下述记号.

对于点集$\sigma=\{x_i,i=1,2,\cdots,N\}\subset E^n$,设$a_{ij}=|x_i-x_j|$表示$x_i$与$x_j$间的距离,$a$是$E^n$中任一点,记

$$P_3(\sigma,a)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-a|^3, \tag{1}$$

表示 σ 中所有点到点 a 的距离立方之平均；

$$M_r(\sigma)=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^r, \tag{2}$$

表示 σ 中每两点距离 r 次方之平均[1]；

$$J(\sigma)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^2 \tag{3}$$

表示 σ 关于它的每一点平均转动惯量平方之平均，这里 $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}^2$ 是 σ 关于点 x_i 的平均转动惯量.

设 F 是 E^n 中紧致超曲面，f 表示 F 的面积，a 是 E^n 中任一点，记

$$P_r(F,a)=\frac{1}{f}\int_F|x-a|^r\mathrm{d}\sigma(x), \tag{4}$$

则 $P_r(F,a)$ 表示超曲面 F 到点 a 的 r 阶距离之平均.

$$M_r(F)=\frac{1}{f^2}\int_F\int_F|x-y|^r d\sigma(x)\cdot\mathrm{d}\sigma(y) \tag{5}$$

表示超曲面 F 的 r 阶弦幂之平均[1].

$$J(F)=\frac{1}{f}\int_F\left[\frac{1}{f}\int_F|x-y|^2\mathrm{d}\sigma(x)\right]^2\mathrm{d}\sigma(y) \tag{6}$$

表示超曲面 F 关于它的每点平均转动惯量平方之平均.

上述积分均是曲面积分.

有了上述记号，我们获得与伪对称集有关的下述一个几何不等式：

定理 1 设点集 $\sigma=\{x_i;i=1,2,\cdots,N\}\subset E^n(N>n)$，$a_{ij}=|x_i-x_j|$ $(1\leqslant i<j\leqslant N)$，$a$ 是 E^n 中任一点，则有

$$P_3^4(\sigma,a)\geqslant\frac{n^3}{8(n-1)^3}\left[J(\sigma)-\frac{N-1}{2N}M_4(\sigma)\right]^3, \tag{7}$$

等号成立当且仅当 σ 是 E^n-伪对称集且 a 是 σ 之中心.

对 E^n 中紧致超曲面 F 上的有限点集,应用不等式(7)并取极限,从而获得关于紧致超曲面的下述一个重要不等式(8),且此不等式中等号成立的条件是超球面区别于其他超曲面的一个特征.

定理 2 设 F 是 E^n 中的紧致超曲面,a 是 E^n 中任一点,则有

$$P_3^4(F,a)\geqslant\frac{n^3}{8(n-1)^3}\left[J(F)-\frac{1}{2}M_4(\sigma)\right]^4, \tag{8}$$

等号成立当且仅当 F 是一超球面且 a 为其中心.

2. 引理与定理的证明

为了证明定理 1,我们需引用下面几个引理.

引理 1[4] 设点集 $\sigma=\{x_i;i=1,2,\cdots,N\}\subset E^n(N>n)$ 中,每两点距离平方之和为 N_1,每三点所成三角形面积平方之和为 N_2,则

$$N_1^2\geqslant\frac{8n}{n-1}N\cdot N_2, \tag{9}$$

等号成立当且仅当 σ 关于其重心惯量椭球为一球(即 σ 为惯量等轴的).

引理 2 设点集 $\sigma=\{x_i;i=1,2,\cdots,N\}\subset E^n$,$a$ 是 E^n 中任一点,$|x_i-a|=d_i(i=1,2,\cdots,N)$,$a_{ij}=|x_i-x_j|\quad(1\leqslant i<j\leqslant N)$,则有

$$N\sum_{i=1}^N d_i^2\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^2, \tag{10}$$

等号成立当且仅当 a 是 σ 之重心.

证明 取 a 为 n 维笛卡尔直角坐标系之原点,设 $x_i(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})\quad(i=1,2,\cdots,N)$,则

$$d_i^2=\sum_{t=1}^n x_{it}^2\qquad(i=1,2,\cdots,N),$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\ \sum_{t=1}^n(x_{it}-x_{jt})^2$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{t=1}^{n} (x_{it}^2 + x_{jt}^2 - 2x_{it} \cdot x_{jt})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq N} (d_i^2 + d_j^2) - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{t=1}^{n} x_{it} x_{jt}$$

$$= (N-1) \sum_{i=1}^{N} d_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{t=1}^{n} x_{it} y_{jt}. \tag{11}$$

设 σ 之重心为 g，则 $g\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i1}, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{i2}, \cdots, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{in} \right)$，从而

$$N^2 |g-a|^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_{i1} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} x_{i2} \right)^2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{N} x_{in} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{n} x_{it}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{t=1}^{n} x_{it} \cdot x_{jt}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} d_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sum_{t=1}^{n} x_{it} \cdot x_{jt}. \tag{12}$$

由(11)、(12)两式，得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ij}^2 = N \sum_{i=1}^{N} d_i^2 - N^2 |g-a|^2 \geqslant N \sum_{i=1}^{N} d_i^2,$$

上式中等号成立当且仅当 σ 之重心 g 与点 a 重合.

下面给出定理 1 的证明：

由熟知的幂平均不等式，有

$$\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \leqslant N^{1/3} \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^3 \right)^{2/3}, \tag{13}$$

等号成立当且仅当 $d_1 = d_2 = \cdots = d_N$.

由(10)、(13)两式，得

$$\sum_{1 \leq i < j \leq N} a_{ij}^2 \leqslant N^{4/3} \left(\sum_{i=1}^{N} d_i^3 \right)^{2/3}, \tag{14}$$

等号成立当且仅当点集 σ 中的所有点分布在以 a 为球心的一球面上且 a 为 σ 之重心.

由引理 1，有

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij}^2\right)^2 \geqslant \frac{8n}{n-1}\cdot N \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} \triangle_{ijk}^2, \tag{15}$$

等号成立当且仅当 σ 关于其重心的惯量椭球为一球. 其中 $\triangle_{ijk}$ 表示以 x_i, x_j, x_k 为顶点的三角形之面积.

由 Heron 公式，有

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} \triangle_{ijk}^2 = \frac{1}{16}\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} (2a_{ij}^2a_{jk}^2 + 2a_{jk}^2a_{ki}^2 + 2a_{ki}^2a_{ij}^2 - a_{ij}^4 - a_{jk}^4 - a_{ki}^4)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2\right)^2 - N\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij}^4\right]. \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式，得

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij}^2\right)^2 \geqslant \frac{n}{2(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2\right)^2 - N\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij}^4\right], \tag{17}$$

等号成立当且仅当 σ 关于其重心的惯量椭球为一球.

由(14)、(17)两式，得

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2\right)^4 \geqslant \frac{n^3}{8(n-1)^3}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2\right)^2 - \frac{N-1}{2N}\cdot\frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} a_{ij}^4\right]^3$$

上式即为我们所要证明的不等式(7). 由(14)、(17)中等号成立的条件可知，(7)中等号成立的充分必要条件是：σ 是 E^n-伪对称集且 a 为 σ 之中心. 定理 1 证毕.

感谢杨路教授对本文的审阅和指导！

参考文献

[1]杨路、张景中，伪对称集与有关的几何不等式，数学学报，6(1986)，802—806.

[2]周家农，伪对称集的一个充分必要条件，数学研究与评论，1(1990)，65—68.

[3]杨世国,球面型空间中伪对称集的两个几何特征与有关的一个几何不等式,数学杂志,4(1992),361—367.
[4]杨路、张景中,关于有限点集的一类几何不等式,数学学报,5(1980),740—749.

关于高维单形的 Erdös-Mordell 型不等式

冷岗松

湖南教育学院（长沙，410012）

关于 E^n 中 n 维单形内任一点到 $n-1$ 维界面的距离与它到顶点的距离的各种 Erdös-Mordell 型不等式的研究，一直是高维几何不等式研究中一个难度较大且倍受重视的课题[1—4].

本文运用距离几何的理论和方法[5—8]建立一个新的 Erdös-Mordell 型不等式，为此，还解决了陈计与单墫关于 Gerber 不等式的一个猜想.

1. 主要结论

设 $\tau=\{P_1,P_2,\cdots,P_{n+1}\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 n 维单形 Ω 的顶点集，顶点 P_i 所对的 $n-1$ 维界面为 F_i，并用记号 $E^{[K]}(a_1,\cdots,a_m)$ 表示 m 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 的第 K 级对称平均数.

我们的结果可简洁地表述为如下的定理.

定理 设 P 是 n 维单形 Ω 内任一点，P 到 $n-1$ 维界面 F_i 的距离为 r_i，P 与顶点 P_i 的距离为 R_i，则

$$E^{[1]}(R_1,\cdots,R_{n+1})\geqslant n\cdot E^{[n]}(r_1,\cdots,r_{n+1}),\tag{1}$$

当 Ω 为正则单形且 P 为其中心时等号成立.

2. 几个引理

设 θ_{rs} 为 n 维单形 Ω 的两个 $n-1$ 维界面 F_r 和 F_s 所成的二面角，令

$$A_i=\begin{vmatrix}1 & & & -\cos\theta_{sr} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{sr} & & & 1\end{vmatrix},1\leqslant r<s\leqslant n+1,r,s\neq i,$$

则 $\theta_i=\arcsin\sqrt{\det A_i}$ 叫做 Ω 的顶点 P_i 所对应的顶点角[8].

引理 1[8]　设 n 维单形 Ω 的顶点 P_i 所对应的顶点角为 θ_i，P_i 所对应的 $n-1$ 维界面 F_i 的 $n-1$ 维体积为 V_i，则

$$\frac{\sin\theta_i}{V_i}=\frac{(nV)^{n-1}}{(n-1)!\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)}. \tag{2}$$

引理 2　设 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n+1}$ 是 n 维单形 Ω 的顶点角，$x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是正实数，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\sin^2\theta_i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n, \tag{3}$$

当 Ω 是正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 时等号成立.

证明　令

$$A=\begin{bmatrix}1 & & & -\cos\theta_{rs} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{rs} & & & 1\end{bmatrix}_{n+1}^{n+1},$$

$$B=\begin{bmatrix}x_1 & & 0 & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_{n+1}\end{bmatrix}_{n+1}^{n+1}$$

则 A 是正半定对称矩阵且 $\det A=0$([6])，B 是正定对称矩阵.

考虑关于 λ 的方程

$$\det(A+\lambda B)=0. \tag{4}$$

设 A_{ij} 和 B_{ij}，$i,j=1,2,\cdots,n+1$ 表示矩阵 A 和 B 对应的代数余子

式，又令

$$|A|=\det A,\ |B|=\det B,$$

将(4)展开，得

$$|B|\lambda^{n+1}+\left(\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}B_{ij}\right)\lambda^{n}+\cdots+\left(\sum_{i,j=1}^{n+1}b_{ij}A_{ij}\right)\lambda+|A|=0. \tag{5}$$

因 $|A|=0$，在(5)中约去一个零根后，得

$$|B|\lambda^{n}+\left(\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}B_{ij}\right)\lambda^{n-1}+\cdots+\left(\sum_{i,j=1}^{n+1}b_{ij}A_{ij}\right)=0. \tag{6}$$

(6)可简记为

$$C_0\lambda^{n}+C_1\lambda^{n-1}+\cdots+C_n=0. \tag{7}$$

由于 A 正半定且 B 正定，因此(7)的根都是非正的．根据算术-几何平均值不等式，得

$$\frac{C_1}{nC_0}\geqslant\left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{8}$$

注意到当 $i\neq j$ 时 $B_{ij}=0$，$A_{ii}=\sin^2\theta_i$，通过计算，易得

$$\begin{cases}C_0=\prod\limits_{i=1}^{n+1}x_i,\\ C_1=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(\prod\limits_{j\neq i}x_j\right),\\ C_n=\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i\sin^2\theta_i.\end{cases}$$

代入(8)整理，得

$$\frac{\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)^{n}}{n^{n}}\geqslant\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{x_j}\right)\sin^2\theta_i. \tag{9}$$

将(9)中的 $\dfrac{1}{x_i}$ 换为 x_i，便得所证不等式(3)．

引理 2 的另一证明可见文[11]．

在引理 2 中，令 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}=1$，便得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\theta_i\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这是文[9]的主要结果.

引理 3 设 n 维单形 Ω 的 $n-1$ 维侧面 F_i 的 $n-1$ 维体积为 V_i，Ω 的体积为 V，则对任意正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，有

$$V^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)V_i\leqslant\frac{(n-1)!}{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{3n-2}{2}}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n\cdot\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right),\tag{10}$$

当 Ω 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$ 时等号成立.

证明 对凸函数 $y=x^2(x>0)$ 用著名的 Jensen 不等式，有

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\sin\theta_i}{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)}\right)^2\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\sin^2\theta_i}{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)}.$$

综合上式与引理 2，便得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\sin\theta_i\leqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}.\tag{11}$$

再将引理 1 代入(11)整理，便有

$$V^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)V_i\leqslant\frac{(n-1)!\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{3n-2}{2}}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right).\tag{12}$$

又由 Marclaurin 不等式[10]，可得

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}x_j\right)\leqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n}{(n+1)^{n-1}}.\tag{13}$$

对(12)的右边用(13)便得所证不等式(10).

引理 4 设 n 维单形 Ω 的体积为 V，Ω 内任一点 P 到侧面 F_i 的距离为 r_i，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i} r_j\right) \leqslant \frac{(n-1)!}{(n+1)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{n}{2}-1}} \cdot V, \tag{14}$$

当 Ω 为正则单形且 P 为其中心时等号成立.

证明 在不等式(10)中令 $x_i=r_iV_i$，两边约去 $\prod_{i=1}^{n+1} V_i$，可得

$$V^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i} r_j\right) \leqslant \frac{(n-1)!\left(\sum_{i=1}^{n+1} r_iV_i\right)^n}{(n+1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot n^{\frac{3n-2}{2}}}. \tag{15}$$

又注意到明显的几何事实

$$\sum_{i=1}^{n+1} r_iV_i=nV,$$

代入(15)整理便得引理 4 要证的不等式(14).

引理 4 是陈计、单墫关于 Gerber 不等式加强的一个猜想[10].

3. 定理的证明

过单形 Ω 的顶点 P_i 作一个以 $\overrightarrow{PP_i}$ 为法向量的 $n-1$ 维超平面 E_i. 由于 $\overrightarrow{PP_1}$，$\overrightarrow{PP_2}$，…，$\overrightarrow{PP_{n+1}}$ 任 n 个都线性无关，利用这些超平面的线性方程和 Cramer 法则，易证 $E_1, E_2, \cdots, E_{n+1}$ 这 $n+1$ 个超平面两两相交，且任 n 个有唯一的公共点. 这样，这 $n+1$ 个超平面就围成了一个以 P 点为内点的新的 n 维单形 Ω'.

设 Ω' 的由 $E_1,\cdots,E_{i-1},E_{i+1},\cdots,E_{n+1}$ 所确定的顶点为 P'_i，E_i，E_j 所成的二面角为 θ'_{ij}，顶点 P'_i 对应的顶点角为 θ'_i. 设向量 $\overrightarrow{PP_i}$，$\overrightarrow{PP_j}$ 的夹角为 α_{ij}，则易见

$$\theta'_{ij}=\pi-\alpha_{ij},$$

$$\sin^2\theta'_i=\det\begin{bmatrix}1 & & -\cos\theta_{rs} & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{rs} & & & 1\end{bmatrix}_{r,s\neq i}$$

$$=\det\begin{bmatrix}1 & & \cos\alpha_{rs} \\ & 1 & \\ & \ddots & \\ \cos\alpha_{rs} & & 1\end{bmatrix}_{r,s\neq i}\triangleq\det(\cos\alpha_{rs})_{r,s\neq i}.$$

现考虑以点集$\{P,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_{n+1}\}$为顶点的单形$\sum_i$的体积$V_i'$，则$V_i'$即为向量$\overrightarrow{PP_1},\cdots\overrightarrow{PP_{i-1}},\overrightarrow{PP_{i+1}},\cdots,\overrightarrow{PP_{n+1}}$所组成的 Gram 行列式的平方根的$\frac{1}{n!}$倍，也就是

$$V_i'=\frac{1}{n!}\det{}^{1/2}(\langle\overrightarrow{PP_r},\overrightarrow{PP_s}\rangle)_{r,s\neq i}.$$

其中〈 〉表示内积，这样

$$V_i'=\frac{1}{n!}\prod_{j\neq i}|\overrightarrow{PP_j}|\cdot\det{}^{1/2}(\cos\alpha_{rs})_{r,s\neq i}=\frac{1}{n!}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\sin\theta_i'.$$

又注意到明显的几何事实

$$\Omega=\sum_1\cup\sum_2\cup\cdots\cup\sum_{n+1},$$

因此单形Ω的体积V为

$$V=\sum_{i=1}^{n+1}V_i'=\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\sin\theta_i'.\tag{16}$$

注意到θ_i'为单形Ω'的顶点角，对(16)的右边用(11)式，便得

$$V\leqslant\frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1}R_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i}R_j\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}\cdot n!}.\tag{17}$$

综合(17)和引理 4，便有

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i} r_j\right) \leqslant \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1} R_i\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i} R_j\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{(n-1)/2}\cdot n^n} \leqslant \frac{1}{n^n(n+1)^{n-1}}\left(\sum_{i=1}^{n+1} R_i\right)^n. \tag{18}$$

后一个不等式是用 Marclaurin 不等式.

(18)可写为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{j\neq i} r_j\right)}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n+1} R_i}{n+1}. \tag{19}$$

(19)便是要证的不等式(1). 定理证完.

感谢杨路、张景中两位导师的悉心指导!

参考文献

[1]L. Gerber, The orthocentric Simplex as an Extreme simplex. Pacific J. Math. 56(1975), 97—111.

[2]V. L. Rabinovič and I. M. Jaglom, O neravenstvah, rodstvennih neravenstvu Erdös-Mordella dlja treugoljnika, Uč. Zap. Moskov. Gos. Ped. Inst. 401(1971), t. 2, 123—128.

[3]F. Abeles, Inequalities for a Simplex and the Number e, J. Geom 15 (1980), 149—152.

[4]D. S. Mitrinovic, J. E. Pećaric and V. Volenec, Recent advances in geometric inequalities, Klumer Academic Publishers, 1989, 495～499.

[5]杨路、张景中,关于有限点集的一类几何不等式,数学学报 23,5(1980), 740—749.

[6]杨路、张景中,预给内角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件,数学学报,26,2 (1983), 250—256.

[7]张景中、杨路,关于质点组的一类几何不等式,中国科学技术大学学报 11,2(1981), 1—8.

[8]F. Eriksson, The law of sines for tetrahedra and n-Simplices, Geom.

Ded. 7:71—80(1978).

[9]蒋星耀,关于高维单形顶点角的不等式,数学年刊 8A,6(1987),668—670.

[10]陈计,关于 Gerber 不等式的加强,福建中学数学,5(1992),8—9.

[11]张垚,关于垂足单形的一个猜想,系统科学与数学,12(4)(1992),371—375.

E^n 中的一个几何恒等式及其应用

张晗方

徐州师范学院(江苏,222300)

定理 1 设 $\mathscr{A}$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的单形,其 n 维体积为 V,顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维超平面上的高为 h_i. 又 P 为 $\mathscr{A}$ 中的任一点,且 PB_i(或所在直线,且 $\vec{PB_i}$ 指向 $\mathscr{A}$ 的外侧)垂直于 $\mathscr{A}$ 的顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维超平面(或所在的平面),记 $|PB_i|=r_i$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$,若由点 $B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}$ 所支撑的单形 $\mathscr{B}$ 的 n 维体积为 V',则有

$$n!^2V'V=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}(r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n})(h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}). \tag{1}$$

证明 由 Grassmann 代数(或 Cayley-Menger 行列式)易推得过同一点且长度分别为 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 所张成的单形的 n 维体积 V 为:

$$V=\frac{1}{n!}\left(\prod_{j=1}^{n}l_j\right)\sqrt{Q}. \tag{2}$$

其中

$$Q=\begin{vmatrix}1 & & & \cos\alpha_{ij}\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \cos\alpha_{ji} & & & 1\end{vmatrix}\quad(1\leqslant i,j\leqslant n,i\neq j),$$

这里 α_{ij} 为 l_i 与 l_j 所夹的角.

现将单形 $\mathscr{B}$ 分为 $n+1$ 个子块 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2,\cdots,\mathscr{B}_{n+1}$，子块 $\mathscr{B}_i$ 的顶点集为 $\{B_1,B_2,\cdots,B_{i-1},P,B_{i+1},\cdots,B_{n+1}\}$，设 PB_j 与 PB_k 的夹角为 α_{jk}，$\mathscr{A}$ 的顶点 A_j 与 A_k 所对的二 $n-1$ 维超平面所夹的内二面角为 θ_{jk}，则易知有关系式 $\alpha_{jk}=\pi-\theta_{jk}$，故将(2)应用于子块 $\mathscr{B}_i$ 的 n 维体积 V_i' 便可得

$$V'=\sum_{i=1}^{n+1}V_i'=\frac{1}{n!}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}r_j\Big)\sqrt{M_i}.$$

其中

$$M_i=\begin{vmatrix}1 & & -\cos\theta_{jk}\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ -\cos\theta_{kj} & & 1\end{vmatrix}\quad(1\leqslant j,k\leqslant n+1,\text{且 } j\neq k,j,k\neq i).$$

由高维正弦定理知，此处有 $\sin A_i=\sqrt{M_i}$，从而利用高维正弦定理[7]

$$\frac{S_i}{\sin A_i}=\frac{(n-1)!\cdot\prod\limits_{j=1}^{n+1}S_j}{(nV)^{n-1}}\quad(1\leqslant i\leqslant n+1)\qquad(3)$$

和单形的体积公式[6] $V=\frac{1}{n}Sh$，可得

$$\begin{aligned}n!\,V'&=\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}r_j\sin A_i\\&=\frac{(nV)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}r_jS_i}{\prod\limits_{j=1}^{n+1}S_j}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n!\ V}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1} r_j h_j$$

$$=\frac{1}{n!\ V}\cdot\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n+1}(r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n})(h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n}).$$

证毕.

定理 2 设 $\frac{r_i}{h_i}=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$，且 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=\lambda$，其它条件同定理1，则有

$$V'\leqslant\frac{\lambda^n}{n^n}\cdot V. \tag{4}$$

当且仅当 $\mathscr{A}$ 的顶点 A_i 赋予质量 $m_i=\frac{(nV)^2}{r_ih_i}(1\leqslant i\leqslant n+1)$ 后的惯量椭球为球时等号成立.

证明 设 $\mathscr{A}$ 的顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$，$V_{i_0i_1\cdots i_k}$ 为 $\mathscr{A}$ 的 $k+1$ 个顶点 $A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$ 所支撑的 k 维单形的体积，则有[4]

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[(n-l)!\cdot l!^2]^k}{[(n-k)!\cdot k!^2]^l}\cdot(n!\cdot M_0)^{l-k},(0\leqslant k<l\leqslant n) \tag{5}$$

等号成立的充要条件是 $\mathscr{A}$ 的密集椭球为球.

其中

$$M_k=\sum\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0i_1\cdots i_k}\quad(0\leqslant k\leqslant n),$$

$$M_0=m_1+m_2+\cdots+m_{n+1}\quad(m_i>0,1\leqslant i\leqslant n+1).$$

今在(5)中取 $k=n-1,l=n,m_i=\frac{(nV)^2}{r_ih_i}(1\leqslant i\leqslant n+1)$，且利用[6] $V=\frac{1}{n}Sh$ 和 $\sum_{i=1}^{n+1}\frac{r_i}{h_i}=\lambda$ 便立即可得

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le n+1}(r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n})(h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_n})\leqslant\frac{n!^2}{n^n}\cdot\lambda^nV^2. \tag{6}$$

将(1)代入(6)的左端便得(4).

证毕.

在(4)中，当 B_i 在 $\mathscr{A}$ 的顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维超平面上时，$\lambda=1$，且此时为文[1]所提的猜想.

设 K 为 E^n 中所有 n 维单形所构成的集合，取 $r_i=h_i$ $(1\leqslant i\leqslant n+1)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathscr{A}\in K}\frac{V'(\mathscr{A})}{V(\mathscr{A})}=e. \tag{7}$$

(7)的证明由(4)是显然的.

定理 3 设 $\frac{r_i}{h_i}=\lambda_i(1\leqslant i\leqslant n+1)$，且 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=\lambda$，其余条件与定理1同，则有

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}\leqslant\frac{(n+1)!}{\sqrt{n^n(n+1)^{n+1}}}\cdot\lambda^n V. \tag{8}$$

当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n+1}=\frac{1}{n+1}\lambda$，且 $\mathscr{A}$ 的密集椭球为球时等号成立.

证明 由于 $\frac{r_i}{h_i}=\lambda_i$，且 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=\lambda$，故利用 Cauchy 不等式和 Maclaurin 不等式[5]可得

$$\begin{aligned}
n!^2V'V&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}\frac{(r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n})^2}{\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}}\\
&\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}\right)^2}{\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}}\\
&\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}\right)^2}{C_{n+1}^n\cdot\left(\frac{1}{C_{n+1}^1}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n+1}\lambda_i\right)^n}\\
&=\frac{(n+1)^{n-1}}{\lambda^n}\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1}r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}\right)^2.
\end{aligned}$$

即

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n+1} r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_n}\leqslant\frac{(n+1)!}{\sqrt{(n+1)^{n-1}}}\cdot\sqrt{\lambda^n V'V}. \tag{9}$$

将(4)代入(9)内立即可得(8).

证毕.

在(8)中,当 $\mathscr{B}$ 的顶点 B_i 在 $\mathscr{A}$ 的顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维超平面上时,便是[2]中所提出的猜想.

若设 $\mathscr{B}$ 的外接球半径为 R',$\mathscr{A}$ 的 n 维体积为 V,且内切球半径为 r,则由(8)可得

$$R'^n\leqslant\frac{n!}{\sqrt{n^n(n+1)^{n+1}}}\cdot\lambda^n V. \tag{10}$$

$$r^n\leqslant\frac{n!}{\sqrt{n^n(n+1)^{n+1}}}\cdot V. \tag{11}$$

当且仅当 $\mathscr{A}$ 的密集椭球为球时等号成立.

参考文献

[1]苏化明,关于单形的一个不等式,数学通报,5(1985),43--46.

[2]陈计,关于 Gerber 不等式的加强,福建中学数学,5(1992),8--9.

[3]毛其吉、左铨如,切点单形的一个几何不等式,数学的实践与认识,4(1987),71--75.

[4]张景中、杨路,关于质点组的一类几何不等式,中国科学技术大学学报(自然科学版),11:2(1981),1—8.

[5]G. H. Hardy,等,不等式,科学出版社,1965,53--57.

[6]张晗方,单形中的一类不等式,数学的实践与认识,3(1981),39--48.

[7]F. Eriksson, The lew of sines for tetrahedra and n-simplices, Geometriac dedicata, 7(1978), 71--80.

关于 Zonotopes 的一组几何不等式

郭曙光

盐城师范专科学校数学系(江苏,224002)

1. 引言

欧氏空间 R^d 中的 Zonotope 是有限条线段的 Minkowski 和，记作

$$Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n],n\in N,$$

其中 x_i 表示 R^d 中的点. 为了方便,x_i 也表示始点在原点 O 的向量,$[x_i]$表示凸包 $\mathrm{Conv}\{0,x_i\}$,集合 $genZ=\{x_1,x_2,\cdots x_n\}$ 叫做 Z 的生成子集,特别地,当 $n=d$,$x_1,x_2,\cdots,x_d$ 线性无关时,$Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_d]$就是 R^d 中的一个超平行体.

关于 Zonotope,早就有了不少有趣的结果,有的研究 Zonotope 的组合性质,例如文[2];有的研究 Zonotope 的度量性质,例如文[1],本文讨论 Zonotope 的度量性质,建立 R^d 中超平行体的一类几何不等式. 作为其应用,首先建立 Zonotope 的体积同其生成子长度之间的一个几何不等式,推广了文[1]的一个重要结果,其次建立超平行体各个面的体积之间的一组几何不等式.

2. 主要结果

设 $x_i(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{id})$,$i=1,2,\cdots,n$ 为 R^d 中的 n 个点,向量组 $x_1,\cdots,x_n$ 的秩为 d. 给每个点 x_i 赋上质量 $m_i>0$,作成 R^d 中的质点组 $\varphi=\{x_1(m_1),x_2(m_2),\cdots,x_n(m_n)\}$,任取 φ 中 $k(k\leqslant d)$个点

$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}, k \leqslant d$，由格拉斯曼代数[3]，$Z_{i_1 i_2 \cdots i_k} = [x_{i_1}] + [x_{i_2}] + \cdots + [x_{i_k}]$的 k 维体积 $D_{i_1, i_2, \cdots, i_k}$ 就等于向量外积 $x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}$ 的模 $|x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_k}|$，记

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} x_{11} & \sqrt{m_1} x_{12} & \cdots & \sqrt{m_1} x_{1d} \\ \sqrt{m_2} x_{21} & \sqrt{m_2} x_{22} & \cdots & \sqrt{m_2} x_{2d} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \sqrt{m_n} x_{n1} & \sqrt{m_n} x_{n2} & \cdots & \sqrt{m_n} x_{nd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} x_1 \\ \sqrt{m_2} x_2 \\ \vdots \\ \sqrt{m_n} x_n \end{pmatrix},$$

$$M_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant d} m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_k} D^2_{i_1, i_2, \cdots, i_k}, 1 \leqslant k \leqslant d.$$

定理 1 对 $\varphi = \{x_1(m_1), x_2(m_2), \cdots, x_n(m_n)\}$ 的诸不变量 $\{M_k | k = 1, 2, \cdots, d\}$，有不等式

$$\frac{M_k^l}{M_l^k} \geqslant \frac{[l!\ (d-l)!]^k}{[k!\ (d-k)!]^l} (d!)^{l-k} \quad (1 \leqslant k < l \leqslant d); \tag{1}$$

$$M_k^2 \geqslant \frac{(d-k+1)(k+1)}{(d-k)k} M_{k-1} M_{k+1} \quad (1 < k < d). \tag{2}$$

其等号成立的充要条件是 XX^T 的非零特征根均相等.

证明 因为向量组 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的秩为 d，则

$$XX^T = \begin{pmatrix} m_1 x_1 x_1^T & \sqrt{m_1}\sqrt{m_2} x_1 x_2^T & \cdots & \sqrt{m_1}\sqrt{m_n} x_1 x_n^T \\ \sqrt{m_1}\sqrt{m_2} x_1 x_2^T & m_2 x_2 x_2^T & \cdots & \sqrt{m_2}\sqrt{m_n} x_2 x_n^T \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{m_1}\sqrt{m_n} x_1 x_n^T & \sqrt{m_2}\sqrt{m_n} x_2 x_n^T & \cdots & m_n x_n x_n^T \end{pmatrix}$$

为秩为 d 的半正定矩阵，从而有且仅有 d 个非零的特征根，并且均为正的，设为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$，设矩阵 XX^T 的 $k(1 \leqslant k \leqslant d)$ 阶余子式为 $P(i_1 i_2 \cdots i_k)$，则

$$P(i_1 i_2 \cdots i_k) = \left| \sqrt{m_{i_1}} x_{i_1} \wedge \sqrt{m_{i_2}} x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \sqrt{m_{i_k}} x_{i_k} \right|^2$$

$$=m_{i_1}m_{i_2}\cdots m_{i_k}|x_{i_1}\wedge x_{i_2}\wedge\cdots\wedge x_{i_k}|^2$$
$$=m_{i_1}m_{i_2}\cdots m_{i_k}D^2_{i_1,i_2,\cdots,i_k},$$

于是,XX' 的特征多项式可表示为

$$P(\lambda)=\lambda^{n-d}(\lambda^d-M_1\lambda^{d-1}+\cdots+(-1)^kM_k\lambda^{d-k}+\cdots+(-1)^dM_d),$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_d$ 的 $k(1\leqslant k\leqslant d)$阶初等对称多项式 σ_k 可表示为

$$\sigma_k(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_d)=M_k\quad(1\leqslant k\leqslant d).$$

由 Maclaurin 定理[6],得

$$\left[\frac{k!\ (d-k)!}{d!}\sigma_k\right]^l\geqslant\left[\frac{l!\ (n-l)!}{d!}\sigma_l\right]^k\quad(1\leqslant k<l\leqslant d).$$

进而,得

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[l!\ (d-l)!]^k}{[k!\ (d-k)!]^l}(d!)^{l-k}.\tag{1}$$

由 Newton 定理[6],得

$$\left[\frac{k!\ (d-k)!}{d!}\sigma_k\right]^2\geqslant\left[\frac{(k-1)!\ (d-k+1)!}{d!}\sigma_{k-1}\right]\left[\frac{(k+1)!\ (d-k-1)!}{d!}\sigma_{k+1}\right].$$

进而,得

$$M_k^2\geqslant\frac{(d-k+1)(k+1)}{(d-k)k}M_{k-1}M_{k+1}.\tag{2}$$

由 Maclaurin 定理,Newton 定理中等号成立的充要条件知,(1)、(2)两式中等号成立当且仅当 XX^T 的非零特征根均相等,证毕.

特别地,当点集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的重心在原点时,由文[4]知,(1)、(2)两式中等式成立的充要条件是 φ 惯量等轴.

容易看出,如果 φ 不是有限质点组,而是某个质量区域,设质量分布函数为 $m(x)$,$x\in\varphi$,即可定义

$$M_k=\iint\cdots\int m(x_1)m(x_2)\cdots m(x_k)D^2(x_1x_2\cdots x_k)dx_1dx_2\cdots dx_k.$$

通过极限过程可以证明，定理 1 中的 $M_k(1\leqslant k\leqslant d)$ 理解为这里的积分值时，两个不等式仍成立.

3. 一些应用

利用定理 1，我们不难获得 Zonotope 的体积 $V_d(Z)$ 与生成子长度之间的一个不等式：

定理 2 对 Zonotope $Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]$，有不等式

$$V_d(Z)\leqslant\binom{n}{d}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^{\frac{d}{2}}. \tag{3}$$

其中 $\|x_i\|=\left(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 为向量 x_i 的长度.

证明 我们在质点组 $\varphi=\{x_1(m_1),x_2(m_2),\cdots,x_n(m_n)\}$ 中，令 $m_1=m_2=\cdots=m_n=1,l=d,k=1$，则

$$M_1=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2,M_d=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}D_{i_1,i_2,\cdots,i_d}^2.$$

由定理 1，得

$$\frac{M_1^d}{M_d}\geqslant\frac{d!}{(d-1)!^d}d!^{d-1}.$$

即

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}D_{i_1,i_2,\cdots,i_d}^2\leqslant\frac{1}{d^d}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2\right)^d.$$

文[5]指出，一个 d 维 Zonotope Z 能被分解成 $\binom{n}{d}$ 个超平行体(可能有的是退化的)，每个超平行体都是

$$V_{i_1,i_2,\cdots,i_d}=[x_{i_1}]+[x_{i_2}]+\cdots+[x_{i_d}]$$

的一个平移，其中 $1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_d\leqslant n$，从而 Z 的体积

$$\begin{aligned}V_d(Z)&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}V_d(V_{i_1,i_2,\cdots,i_d})\\&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}D_{i_1,i_2,\cdots,i_d}\end{aligned}$$

$$\leqslant \binom{n}{d}^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n} D^2_{i_1 i_2 \cdots i_d} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \binom{n}{d}^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 \Big)^{\frac{d}{2}}.$$

特别地，令 $\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2 = d$，就得到文[1]定理 4，而文[1]中定理 4 的证明要用到凸多胞形组合理论的知识.

利用定理 1，我们还可以讨论超平行体各维面的体积之间的关系.

对于 k^d 中 d 维超平行体 $Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_d]$，

$$F_k = \{V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)} \mid V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)} = [x_{i_1}]+[x_{i_2}]+\cdots+[x_{i_k}],$$
$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d\} \quad (1\leqslant k\leqslant d)$$

为 Z 的过原点的所有 k 维面的集合，$V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 的 k 维体积记为 $D(i_1,i_2,\cdots,i_k)$，Z 的其余任一 k 维面均为 F_k 中某个面的平移，可表示为

$$V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}+\lambda_{k+1}x_{i_{k+1}}+\lambda_{k+2}x_{i_{k+2}}+\cdots+\lambda_d x_{i_d}. \tag{4}$$

其中

$$\{x_{i_{k+1}},x_{i_{k+2}},\cdots,x_{i_d}\}=\{x_1,x_2,\cdots,x_d\}\setminus\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}\},$$

$\lambda_i=0$ 或 1，$k<i\leqslant d$，并且 F_k 中任一个面 $V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$，(4)式表示的所有 k 维平行体为 Z 的与 $V_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)}$ 平行的 k 维面全体，共有 2^{d-k} 个，因此，讨论 Z 的各维面体积之间的关系只需讨论其过原点的所有各维面之间的关系，我们有下面的定理.

定理 3 对于 R^d 中 d 维超平行体 $Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_d]$ $(1\leqslant l<k\leqslant d)$，有不等式

$$\Big(\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d} D_{(i_1,i_2,\cdots,i_k)} \Big)^{\frac{1}{k\binom{d}{k}}} \leqslant \Big(\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant d} D_{(i_1,i_2,\cdots,i_l)} \Big)^{\frac{1}{l\binom{d}{l}}}.$$

上式中等号成立的充要条件为 XX^T 是一个对角元都相等的对角阵.

证明 取

$$m_i = D^2(1,2,\cdots,(i-1),(i+1),\cdots d),$$

对质点组

$$\varphi = \{x_1(m_1), x_2(m_2), \cdots, x_d(m_d)\},$$

应用定理 1,令 $l=d, k=d-1$,则

$$M_{d-1} = \sum_{i=1}^{d} m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_d D^2(1,2,\cdots,(i-1),(i+1),\cdots,d)$$

$$= d \prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{d-1}\le d} D^2(i_1,i_2,\cdots,i_{d-1}),$$

$$M_d = m_1 m_2 \cdots m_d (V_d(Z))^2$$

$$= (V_d(Z))^2 \prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{d-1}\le d} D^2(i_1,i_2,\cdots,i_{d-1}).$$

由定理 1,得

$$\frac{M_{d-1}^d}{M_d^{d-1}} \geqslant \frac{d!^{d-1}}{(d-1)!^d} d!.$$

代入并整理,得

$$(V_d(Z))^{d-1} \leqslant \prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{d-1}\le d} D(i_1,i_2,\cdots,i_{d-1}). \qquad (6)$$

一般地,对 Zonotope $V(i_1 i_2 \cdots i_k) = [x_{i_1}] + [x_{i_2}] + \cdots + [x_{i_k}]$,$1<k\leqslant d$,应用(6)式可得

$$(D(i_1 i_2 \cdots i_k))^{k-1} \leqslant \prod_{j=1}^{k} D(i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_k), \quad 2\leqslant k\leqslant d. \qquad (7)$$

$$\prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le d} (D(i_1 i_2 \cdots i_k))^{k-1}$$

$$\leqslant \prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le d} \prod_{j=1}^{k} D(i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_{j+1} \cdots i_k)$$

$$= \prod_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\le d} (D(i_1 i_2 \cdots i_{k-1}))^{d-k+1}.$$

即有不等式

$$\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d} D(i_1 i_2\cdots i_k)\leqslant\left\{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k-1}\leqslant d} D(i_1 i_2\cdots i_{k-1})\right\}^{\frac{d-k+1}{k-1}}.$$

依此类推,逐步放大不等式,不难得到

$$\left\{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d} D(i_1 i_2\cdots i_k)\right\}^{\frac{1}{k\binom{d}{k}}}\leqslant\left\{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant d} D(i_1 i_2\cdots i_l)\right\}^{\frac{1}{l\binom{d}{l}}}. \tag{5}$$

易见,(5)式等号成立当且仅当(7)式等号成立. 由定理 1,(7)式等号成立的充要条件是矩阵 XX^T 的特征根都相等,其中 X 为定理 1 证明中的 $d\times d$ 方阵. 而由线性代数知识易得,XX^T 的特征根相等当且仅当向量 $x_1,x_2,\cdots,x_d$ 两两正交,且 $\sqrt{m_1}x_1,\cdots,\sqrt{m_d}x_d$ 的长度都相等,从而(5)式等号成立的充要条件是 XX^T 是对角元都相等的对角阵. 证毕.

对于 R^d 中 d 维单形 $S=\mathrm{conv}\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_d\}$,不妨设 x_0 在原点 O,S 的过 O 点的一个 k 维面

$$f_{i_1 i_2\cdots i_k}=\mathrm{conv}\{0,x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}\},1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d,$$

其 k 维体积

$$V_{i_1 i_2\cdots i_k}=\frac{1}{k!}D(i_1 i_2\cdots i_k),$$

因此,(5)式也给出了单形过某个顶点的各维面的体积之间的一个不等式,即有下列不等式.

推论 1 $S=\mathrm{conv}\{x_0,x_1,\cdots,x_d\}$ 为 R^d 中的单形,$V_{i_1 i_2\cdots i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d)$ 为过顶点 x_0 的面 $f_{i_1 i_2\cdots i_k}$ 的 k 维体积,则

$$\left\{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant d} k!\ V_{i_1 i_2\cdots i_k}\right\}^{\frac{1}{k\binom{d}{k}}}$$

$$\leqslant\left\{\prod_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant d} l!\ V_{i_1 i_2\cdots i_l}\right\}^{\frac{1}{l\binom{d}{l}}}\quad(1\leqslant l<k\leqslant d).$$

式中等号成立的充要条件是 S 为直角单形(即 S 过顶点 x_0 的所有棱彼此正交).

特别地，令 $l=d-1, k=d$，即得 S 的体积 V 和过顶点 x_0 的侧面 $f_i=f_{12\cdots(i-1)(i+1)\cdots d}$ 的 $d-1$ 维体积 V_i 之间的关系式

$$V^{d-1}\leqslant\frac{[(d-1)!]^d}{[d!]^{d-1}}\prod_{i=1}^{d}V_i.$$

又 $V=\frac{1}{d}V_ih_i$，h_i 为面 f_i 上的高线长，从而又可得下列不等式：

推论 2　$S=\mathrm{conv}\{x_0,x_1,\cdots,x_d\}$ 为 R^d 中单形，h_i 为侧面 $f_i(i=1,2,\cdots,d)$ 上的高线长，则

$$V\geqslant\frac{1}{d!}\prod_{i=1}^{d}h_i.$$

式中等号成立当且仅当 S 为直角单形.

另外，由(5)式易得

$$V_d(Z)\leqslant\prod_{i=1}^{d}\|x_i\|.$$

将此式应用到 Zonotope 的体积公式，又可得下面的不等式：

推论 3　对 Zonotope $Z=[x_1]+[x_2]+\cdots+[x_n]$，有

$$V_d(Z)\leqslant\frac{\binom{n}{d}}{n^d}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\right)^d.$$

证明　$$V_d(Z)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}D(i_1i_2\cdots i_d)$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_d\leqslant n}\|x_{i_1}\|\cdot\|x_{i_2}\|\cdots\|x_{i_d}\|$$

$$\leqslant\binom{n}{d}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|}{n}\right)^d$$

$$=\frac{\binom{n}{d}}{n^d}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\right)^d.$$

参考文献

[1]P. Filliman, Extremum Problems for Zonotopes, Geometriae Dedicata, 27(1988), 251-262.

[2]P. Mumullen, On Zonotope's, Trans, Amer Math. Soc, 1971, 159: 91-109.

[3]项武义等,古典几何学,复旦大学出版社,1986,65—72.

[4]张景中、杨路,关于质点组的一类几何不等式,中国科学技术大学学报,1981,11(2):1-8.

[5]G. C. Shephard, Combinatorial Properities of Associated Zonotopes, Canad. J. Math. XXVI, No, 2, 1974, 302 321.

[6]G. H Hardy 等,不等式,科学出版社,1965,53—57.

关于弱伪对称集的两个几何不等式

林　波

扬州大学师范学院数学与计算机科学系(江苏,225002)

杨路、张景中教授在文[1]中给出了 E^n 中点集的诸不变量 $\{N_k\}$ 满足不等式

$$\frac{N_k^l}{N_l^k} \geqslant \frac{[(m-l)!\ l!^3]^k}{[(m-k)!\ k!^3]^l}(m!\ N)^{l-k} \quad (1 \leqslant k < l \leqslant m);$$

$$N_k^2 \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{m-k+1}{m-k} N_{k-1} N_{k+1} \quad (1 \leqslant k \leqslant m, N_0 = N).$$

其中等号成立的条件是给定点集呈惯量等轴分布.其后,文[2]中又引进了一种比“惯量等轴”对称性更强的“伪对称集”的概念,并建立了各点间距离的四次幂平均与二次幂平均间的一不等式.本文在特殊条件下加强了相应结果.

首先,参照文[2]中伪对称集的概念,我们定义弱伪对称集的概念.

定义　$\sigma \subset E^n$ 是 E^n 中有限点集,若

(i) σ 的点分布在 E^n 中某球面 $S^{(n-1)}(R)$ 上;

(ii) $S^{(n-1)}(R)$ 的中心 C 恰为 σ 的重心,

则称 σ 是弱伪对称集.

以下我们记 $\sigma = \{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$, $I = \{1, 2, \cdots, N\}$, $J = \{1, 2, \cdots, n\}$. $P_1, \cdots, P_N$,表示 E^n 中点(不至混淆时亦表示 E^n 中起点在

原点的相应向量)：$a_{ij}=|P_i-P_j|$，表示两点间距离，σ 中所有不同两点间距离的平方和用 N_1 表示，以 σ 中顶点为顶点的所有三角形面积的平方和用 N_2 表示.

定理 1　对弱伪对称集

$$\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{(n-1)}(R),$$

记 S 为 σ 中所有不同两点间距离的四次方之和，则

$$\frac{N^2}{4}\leqslant\frac{N_1^2}{S}\leqslant\min\left\{\frac{nN^2}{2(n+1)},\frac{N(N-1)}{2}\right\}. \tag{1}$$

证明　不妨设 $S^{(n-1)}(R)$ 的中心 C 为坐标原点，记 $\angle P_iCP_j=\theta_{ij}$，$i$、$j\in I$. 根据 $\sigma\subset S^{(n-1)}(R)$，对 $\forall i\in I$，有

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^4&=\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}[(P_i-P_j)^2]^2\\&=4\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}[R^4+(P_i\cdot P_j)^2-2R^2(P_i\cdot P_j)]\\&=4(N-1)R^4+4\left[\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}(P_i\cdot P_j)^2-2R^2P_i\cdot\left(\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}P_j\right)\right].\end{aligned}$$

注意到 σ 弱伪对称，有

$$\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^4=4(N+1)R^4+4\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}(P_i\cdot P_j)^2\quad(i\in I).$$

对 i 求和，得

$$\begin{aligned}S&=2N(N+1)R^4+2R^4\sum_{\substack{i,j\in I\\ i\neq j}}\cos^2\theta_{ij}\\&=2N^2R^4+2R^4\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}.\end{aligned} \tag{2}$$

由于 σ 外心与重心重合，由[3]，知

$$N_1=N^2R^2. \tag{3}$$

将(3)代入(2)并化简，得

$$S=\frac{2N_1^2}{N^2}\left(1+\frac{1}{N^2}\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}\right). \tag{4}$$

由 σ 弱伪对称，知

$$\begin{aligned}R^2\sum_{j\in I}\cos\theta_{ij}&=\sum_{j\in I}R^2\cos\theta_{ij}\\&=\sum_{j\in I}P_i\cdot P_j\\&=P_i\cdot\sum_{j\in I}P_j\\&=0\qquad\qquad (i\in I).\end{aligned}$$

从而

$$\sum_{j\in I}\cos\theta_{ij}=0\ (i\in I).\tag{5}$$

即

$$\sum_{\substack{j\in I\\j\neq i}}\cos\theta_{ij}=-1\ (i\in I).$$

由此可见

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j\in I\\j\neq i}}\cos^2\theta_{ij}+N\\&\geqslant\sum_{i\in I}\left[\frac{1}{N-1}\Big(\sum_{\substack{j\in I\\j\neq i}}\cos\theta_{ij}\Big)^2\right]+N\\&=\frac{N^2}{N-1}.\end{aligned}\tag{6}$$

其中等号当且仅当诸 $\cos\theta_{ij}$ 相等时成立.

另一方面，考虑矩阵 $P=(P_i\cdot P_j)$ 及其特征多项式 $P(\lambda)=\det(P-\lambda E)$. 设 $P(\lambda)$ 的根为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_N$，由于

$$P=\begin{bmatrix}R^2 & & & R^2\cos\theta_{ij}\\ & R^2 & & \\ & & \ddots & \\ R^2\cos\theta_{ij} & & & R^2\end{bmatrix},$$

由根与系数的关系，有

$$R^4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(1-\cos^2\theta_{ij})=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\lambda_i\lambda_j.$$

即

$$R^4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(1-\cos^2\theta_{ij})=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\right)^2-\sum_{i\in I}\lambda_i^2\right].\tag{7}$$

因 $\sigma\subset E^n$，P 的秩至多为 n，从而 $P(\lambda)$ 的非零根至多有 n 个. 另一方面，P 实对称，其特征值必是实数，故

$$\sum_{i\in I}\lambda_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\right)^2=\frac{1}{n}(\mathrm{tr}P)^2=\frac{1}{n}(NR^2)^2.$$

故由(7)，得

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\cos^2\theta_{ij}\geqslant\frac{N^2}{2n}-\frac{N}{2}.$$

即

$$\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}\geqslant\frac{N^2}{n}.$$

综合上式与(6)式，得

$$\max\left\{\frac{1}{N-1},\frac{1}{n}\right\}\leqslant\frac{1}{N^2}\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}\leqslant 1.\tag{8}$$

将(8)代入(4)即知(1)式成立.

定理 1 中，$\frac{N^2}{4}\leqslant\frac{N_1{}^2}{S}$ 是文[2]中定理 1a 的反向不等式，而

$$\frac{N_1{}^2}{S}\leqslant\min\left\{\frac{nN^2}{2(n+1)},\frac{N(N-1)}{2}\right\}$$

在 $N\leqslant n$ 时加强了文[2]定理 1a 的结果.

定理 2 对弱伪对称集

$$\sigma=\{P_1,\cdots,P_N\}\subset S^{(n-1)}(R),$$

有不等式

$$\frac{N_1{}^2}{N_2}\geqslant\max\left\{\frac{8N(N-1)}{N-2},\frac{8Nn}{n-1}\right\}.\tag{9}$$

证明 由三角形面积公式，得

$$16N_2=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}(2a_{ij}^2a_{jk}^2+2a_{jk}^2a_{ki}^2+2a_{ki}^2a_{ij}^2-a_{ij}^4-a_{jk}^4-a_{ki}^4)$$

$$=2\sum_{i\in I}\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2\right)-(N-2)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^4. \qquad (10)$$

又

$$\left(\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^2\right)^2=\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^4+2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2 \quad (i\in I).$$

对 i 求和,得

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^2\right)^2=\sum_{i,j\in I}a_{ij}^4+2\sum_{i\in I}\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2\right). \qquad (11)$$

由于 σ 弱伪对称, $P_1+\cdots+P_N=0$(设 $S^{(n-1)}(R)$ 的中心为坐标原点),进而 $\forall i\in I$,得

$$\begin{aligned}\sum_{j(\neq i)}a_{ij}^2&=\sum_{j(\neq i)}(P_j-P_i)^2=\sum_{j(\neq i)}(2R^2-2P_i\cdot P_j)\\&=2(N-1)R^2-2P_i\cdot\left(\sum_{j(\neq i)}P_j\right)\\&=2(N-1)R^2+2P_i^2=2NR^2.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}a_{ij}^2\right)^2=4N^3R^4. \qquad (12)$$

代入(11)式,得

$$2\sum_{i\in I}\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2\right)=4N^3R^4-2S. \qquad (13)$$

将该式与(4)式一起代入(10),得

$$N_2=\frac{N_1^2}{8N}\left(1-\frac{1}{N^2}\sum_{i,j\in I}\cos^2\theta_{ij}\right).$$

再利用(8)即知结论成立.

文[1]曾证明 E^n 中 N 点集满足

$$\frac{N_1^2}{N_2}\geqslant\frac{8nN}{n-1}.$$

定理 2 表明 $N\leqslant n$ 时对弱伪对称集有改进的下界.

参考文献

[1]杨路、张景中,关于有限点集的一类几何不等式,数学学报,23:5(1980),740--749.

[2]杨路、张景中,伪对称集与有关的几何不等式,数学学报,29:6(1986),802---806.

[3]刘立、周加农,一个经典不等式的高维推广,数学季刊,3:2(1988),99- 103.

Pedoe 不等式在常曲率空间中的推广

左铨如

扬州大学师范学院数学与计算机科学系(江苏,225002)

自 1942 年以来,人们给 Pedoe 不等式以许许多多的证法和形形式式的推广[1],本文在文[2]的基础上给出一种更强的推广,并且其证法十分简捷.

设常曲率空间中 n 维单形 $\sum_P=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 的顶点 P_i 与 P_j 间的距离为 ρ_{ij},行列式

$$D(P)=\det(g_{ij}) \tag{1}$$

中元素 g_{ij} 的代数余子式记为 $D_{ij}(P)$. 对应于欧氏空间、球面空间或双曲空间,行列式(1)中的元素 g_{ij} 分别为 $\frac{1}{2}(\rho_{0i}^2+\rho_{0j}^2-\rho_{ij}^2)$、$\cos\sqrt{K}\rho_{ij}$ 或 $ch\sqrt{-K}\rho_{ij}$. 将(1)中去掉第 i、j 行和第 i、j 列所得行列式记作 $D_{ij,ij}$,则我们有下列结果.

定理 1 对于常曲率空间中的两个单形 $\sum_P$、$\sum_Q$,有

$$\frac{[D_{ii}(P)D_{jj}(P)D_{ii}(Q)D_{jj}(Q)]^{\frac{1}{2}}-D_{ij}(P)D_{ij}(Q)}{[D_{ij,ij}(P)D_{ij,ij}(Q)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant[D(P)D(Q)]^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

式中等号成立的充要条件是单形 $\sum_P$ 的两顶点 P_i 与 P_j 所对的

$n-1$维侧面 f_i 与 f_j 所成的内二面角 $\theta_{ij}(P)$与单形 $\sum_Q$ 相应的内二面角 $\theta_{ij}(Q)$相等.

证明 由余弦定理[2]

$$\cos\theta_{ij}=\frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{ii}D_{jj}}} \tag{3}$$

(对于非欧空间此式有时相差一个负号,但不影响最后结果)和恒等式[2]

$$D_{ii}D_{jj}-D_{ij}^2=D_{ij,ij}D$$

即得

$$\sin\theta_{ij}=\frac{\sqrt{D_{ij,ij}D}}{\sqrt{D_{ii}\cdot D_{jj}}}. \tag{4}$$

对单形 $\sum_P$ 和 $\sum_Q$ 的内二面角 $\theta_{ij}(P)$和 $\theta_{ij}(Q)$,运用不等式

$$\cos\theta_{ij}(P)\cos\theta_{ij}(Q)+\sin\theta_{ij}(P)\sin\theta_{ij}(Q)\leqslant 1$$

得

$$D_{ij}(P)D_{ij}(Q)+\sqrt{D_{ij,ij}(P)D(P)D_{ij,ij}(Q)D(Q)}$$
$$\leqslant\sqrt{D_{ii}(P)D_{jj}(P)D_{ii}(Q)D_{jj}(Q)}$$

变形即得(2)式.

特别地,对于 n 维欧氏空间 E^n,这里的

$$D=\det(g_{ij})=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \cdots 1 \\ 1 & \\ \vdots & -\frac{1}{2}\rho_{ij}^2 \\ 1 & \end{vmatrix}=(n!\ V)^2,$$

$D_{ii}=[(n-1)!\ V_i]^2$,

$D_{ij,ij}=[(n-2)!\ V_{ij}]^2$(当 $n=2$ 时,$V_{ij}=1$).

这里的 V 是 n 维单形的体积,V_i 是顶点 P_i 所对侧面 f_i 的 $n-1$ 维

体积，V_{ij}是侧面 f_i 与 f_j 的交集的 $n-2$ 维体积. 将它们代入(2)式可得下述定理 2.

定理 2 对于 E^n 中的两个单形$\sum_P$、$\sum_Q$，有

$$\frac{V_i(P)V_j(P)V_i(Q)V_j(Q)[1-\cos\theta_{ij}(P)\cos\theta_{ij}(Q)]}{V_{ij}(P)V_{ij}(Q)}$$

$$\geqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 V(P)V(Q). \tag{5}$$

式中等号成立的充要条件是

$$\theta_{ij}(P)=\theta_{ij}(Q)(i\neq j).$$

推论 1 对于常曲率空间中的两个单形$\sum_P$、$\sum_Q$，有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{[D_{ii}(P)D_{jj}(P)D_{ii}(Q)D_{jj}(Q)]^{\frac{1}{2}}-D_{ij}(P)D_{ij}(Q)}{[D_{ij,ij}(P)D_{ij,ij}(Q)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\geqslant\frac{n(n+1)}{2}[D(P)D(Q)]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

式中等号成立的充要条件是对于所有的 i、j，$\theta_{ij}(P)=\theta_{ij}(Q)$.

推论 2 对于 E^n 中的两个单形$\sum_P$、$\sum_Q$，有

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}\frac{V_i(P)V_j(P)V_i(Q)V_j(Q)}{V_{ij}(P)V_{ij}(Q)}[1-\cos\theta_{ij}(P)\cos\theta_{ij}(Q)]$$

$$\geqslant\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n}{n-1}\right)^2 V(P)V(Q). \tag{7}$$

式中等号成立的充要条件是$\sum_P$ 相似于 $\sum_Q$，且诸顶点 P_i 相似对应于 Q_i.

在(7)式中取

$$n=2,\quad \cos\theta_{12}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\cdots$$

便得到加强了的 Neuberg-Pedoe 不等式：

$$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$$

$$-\frac{2}{3}[(b'c-c'b)^2+(c'a-a'c)^2+(a'b-b'a)^2\geqslant 16\Delta\Delta'.$$

参考文献

[1]杨路、张景中，Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及应用，数学学报，21：3(1981)401–408.

[2]杨路、张景中，抽象距离空间的秩的概念.中国科学技术大学学报，10：4(1980)1–14.

一个代数不等式与一组涉及两个几何体的不等式

肖振纲　马统一

岳阳师范专科学校数学系(湖南,414000)

甘肃煤炭工业技校(730919)

本文旨在从一个代数不等式出发,导出一组涉及两个几何体的不等式.

命题　对任意实数 $K,\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$,令

$$S_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,S_\beta=\sum_{i=1}^{n}\beta_i,f(\alpha,\beta,K)=S_\alpha S_\beta-K\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i,$$

如果 K,S_α,S_β 均大于零,则有

$$f(\alpha,\beta,K)\geqslant\frac{1}{2}\left[\frac{S_\beta}{S_\alpha}f(\alpha,\alpha,K)+\frac{S_\alpha}{S_\beta}f(\beta,\beta,K)\right].\qquad(1)$$

等式成立当且仅当

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_n}{\alpha_n}.$$

证明　注意 $K>0$,且

$$\frac{S_\beta}{S_\alpha}f(\alpha,\alpha,K)+\frac{S_\alpha}{S_\beta}f(\beta,\beta,K)$$

$$=2S_\alpha S_\beta-K\left(\frac{S_\beta}{S_\alpha}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\frac{S_\alpha}{S_\beta}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right).$$

因此,不等式(1)成立当且仅当不等式

$$\frac{S_\beta}{S_\alpha}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2+\frac{S_\alpha}{S_\beta}\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i \tag{2}$$

成立.而由基本不等式 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,有

$$\frac{S_\beta}{S_\alpha}\alpha_i^2+\frac{S_\alpha}{S_\beta}\beta_i^2\geqslant 2\alpha_i\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

对 i 从 1 至 n 求和即得不等式(2),因而不等式(1)成立.等式成立当且仅当对所有的 $i(1\leqslant i\leqslant n)$,有

$$\alpha_i\sqrt{\frac{S_\beta}{S_\alpha}}=\beta_i\sqrt{\frac{S_\alpha}{S_\beta}},$$

当且仅当

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\cdots=\frac{\beta_n}{\alpha_n}\left(=\frac{S_\beta}{S_\alpha}\right).$$

证毕.

特别地,取 $n=3,K=1$,则当 $S_\alpha>0,S_\beta>0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\beta_1(\alpha_2+\alpha_3)+\beta_2(\alpha_3+\alpha_1)+\beta_3(\alpha_1+\alpha_2)\\ \geqslant&\frac{S_\beta}{S_\alpha}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)+\frac{S_\alpha}{S_\beta}(\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1).\end{aligned} \tag{3}$$

等式成立当且仅当

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}=\frac{\beta_2}{\alpha_2}=\frac{\beta_3}{\alpha_3}.$$

在不等式(3)中,适当地对 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3)$ 赋值,即可得到下述定理.

定理 1 设$\triangle A_1A_2A_3$ 与$\triangle B_1B_2B_3$ 的三边长分别为 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3,面积分别为 Δ_1 与 Δ_2,实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3$ 满足条件

$$S_1\xlongequal{D}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\sqrt{(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}>0,$$

$$S_2\xlongequal{D}\mu_1+\mu_2+\mu_3=\sqrt{-(\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_3\mu_1)}>0.$$

记

$$x=\mu_1(\lambda_2+\lambda_3)+\mu_2(\lambda_3+\lambda_1)+\mu_3(\lambda_1+\lambda_2),$$

$$y=\mu_1(\lambda_3+\lambda_1)+\mu_2(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_3(\lambda_2+\lambda_3),$$

$$z=\mu_1(\lambda_1+\lambda_2)+\mu_2(\lambda_2+\lambda_3)+\mu_3(\lambda_3+\lambda_1),$$

则有不等式

$$b_1^2(xa_1^2+ya_2^2+za_3^2)+b_2^2(xa_2^2+ya_3^2+za_1^2)+b_3^2(xa_3^2+ya_1^2+za_2^2)$$

$$\geqslant 16S_1S_2\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\Delta_1^2+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\Delta_2^2\right). \tag{4}$$

等式成立当且仅当

$$(\lambda_1a_1^2+\lambda_2a_2^2+\lambda_3a_3^2):(\mu_1b_1^2+\mu_2b_2^2+\mu_3b_3^2)$$

$$=(\lambda_1a_2^2+\lambda_2a_3^2+\lambda_3a_1^2):(\mu_1b_2^2+\mu_2b_3^2+\mu_3b_1^2)$$

$$=(\lambda_1a_3^2+\lambda_2a_1^2+\lambda_3a_2^2):(\mu_1b_3^2+\mu_2b_1^2+\mu_3b_2^2).$$

不等式(4)是彭家贵教授于1983年所建立的一个不等式[1]的加权推广，并且加强了杨克昌先生于1985年所建立的一个不等式[2]。

在不等式(1)中，取 $n=4$，并对 $K,\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3,4)$ 适当地赋值，可得如下涉及两个四边形的几个不等式：

定理2 设两个四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的四边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4 与 b_1,b_2,b_3,b_4，面积分别为 F_1,F_2，则有

$$\sum_{i=1}^4 b_i^2\left(\sum_{j=1}^4 a_j^2-2a_i^2\right)+4\left[\frac{\sum_{i=1}^4 b_i^2}{\sum_{i=1}^4 a_i^2}\prod_{i=1}^4 a_i+\frac{\sum_{i=1}^4 a_i^2}{\sum_{i=1}^4 b_i^2}\prod_{i=1}^4 b_i\right]$$

$$\geqslant 8\left[\frac{\sum_{i=1}^4 b_i^2}{\sum_{i=1}^4 a_i^2}F_1^2+\frac{\sum_{i=1}^4 a_i^2}{\sum_{i=1}^4 b_i^2}F_2^2\right]; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^4 b_i^2\left(\sum_{j=1}^4 a_j^2-\frac{12}{7}a_i^2\right)\geqslant\frac{32}{7}\left[\frac{\sum_{i=1}^4 b_i^2}{\sum_{i=1}^4 a_i^2}F_1^2+\frac{\sum_{i=1}^4 a_i^2}{\sum_{i=1}^4 b_i^2}F_2^2\right]; \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{4}b_i\left(\sum_{j=1}^{4}a_j-\frac{5-\sqrt{3}}{2}a_i\right)$$

$$\geqslant(3+\sqrt{3})\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}b_i}{\sum_{i=1}^{4}a_i}F_1+\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i}{\sum_{i=1}^{4}b_i}F_2\right).\tag{7}$$

如果两个四边形均为圆外切四边形(不一定有外接圆),则有

$$\sum_{i=1}^{4}b_i^2\left(\sum_{j=1}^{4}a_j^2-2a_i^2\right)\geqslant4\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}b_i^2}{\sum_{i=1}^{4}a_i^2}F_1^2+\frac{\sum_{i=1}^{4}a_i^2}{\sum_{i=1}^{4}b_i^2}F_2^2\right).\tag{8}$$

其中,(5)式中等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形;(6)、(7)两式中等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正方形;(8)式中等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的双心四边形(既有内切圆又有外接圆的四边形).

不等式(5)加强了陈计先生与马援博士所建立的一个不等式[3];而不等式(6)、(7)、(8)则加强了陈计先生与王振先生于1992年所建立的几个不等式[4].

定理3 设两个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的六条棱长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_6$,体积分别为 V_1 与 V_2,对实数 α,β,记

$$S_a(\alpha)=\sum_{i=1}^{6}a_i^\alpha,S_b(\beta)=\sum_{i=1}^{6}b_i^\beta,$$

则当 $\alpha,\beta\in(0,2]$时,对任意 $\gamma\in(0,3]$,有

$$\sum_{i=1}^{6}a_i^\alpha\left(\sum_{j=1}^{6}b_j^\beta-\gamma b_i^\beta\right)$$

$$\geqslant3(6-\gamma)\left[\frac{S_b(\beta)}{S_a(\alpha)}(72V_1^2)^{\frac{\alpha}{3}}+\frac{S_a(\alpha)}{S_b(\beta)}(72V_2^2)^{\frac{\beta}{3}}\right].\tag{9}$$

等式成立当且仅当两个四面体均为正四面体.

略证 先设法证明如下不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{6} a_i^{\alpha}\right)^2 - \gamma \sum_{i=1}^{6} a_i^{2\alpha} \geqslant 6(6-\gamma)72^{\frac{\alpha}{3}} V_1^{\frac{2\alpha}{3}}. \tag{10}$$

等式成立当且仅当 $A_1A_2A_3A_4$ 为正四面体. 再于不等式(1)中,取 $n=6, K=\gamma, \alpha_i=a_i^{\alpha}, \beta_i=b_i^{\beta}(i=1,2,\cdots,6)$,即可得不等式(9).

不等式(9)加强了杨世国先生于 1989 年建立的一个不等式[5]以及唐立华先生与冷岗松先生不久前建立的另一个不等式[6].

定理 4 设两个四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 与 $B_1B_2B_3B_4$ 的六条棱长分别为 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_6$,棱 a_i 与 b_i 的对棱分别为 a_{i+3} 与 $b_{i+3}(i=1,2,3)$,两个四面体的外接球半径与体积分别为 R_1、R_2 与 V_1,V_2,则有

$$\sum_{i=1}^{3} b_i^2 b_{i+3}^2 \left(\sum_{j=1}^{3} a_j^2 a_{j+3}^2 - 2a_i^2 a_{i+3}^2\right)$$
$$\geqslant 288\left(\frac{b_1^2b_4^2+b_2^2b_5^2+b_3^2b_6^2}{a_1^2a_4^2+a_2^2a_5^2+a_3^2a_6^2} R_1^2V_1^2 + \frac{a_1^2a_4^2+a_2^2a_5^2+a_3^2a_6^2}{b_1^2b_4^2+b_2^2b_5^2+b_3^2b_6^2} R_2^2V_2^2\right). \tag{11}$$

等式成立当且仅当

$$\frac{b_1b_4}{a_1a_4} = \frac{b_2b_5}{a_2a_5} = \frac{b_3b_6}{a_3a_6}.$$

证明 在不等式(3)中适当地赋值,并注意 Legendre 公式[7]:

$$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2 a_{i+3}^2\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{3} a_i^4 a_{i+3}^4 = 576 R_1^2 V_1^2 \tag{12}$$

立即得不等式(11). 证毕.

不等式(11)加强了冷岗松先生于 1989 年所建立的一个不等式[8].

定理 5 在定理 4 的条件下,记

$$S_1=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}a_ia_{i+3},S_2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}b_ib_{i+3},$$

则有

$$\sum_{i=1}^{3}a_ia_{i+3}(S_1-a_ia_{i+3})(S_2-b_{i+1}b_{i+4})(S_2-b_{i+2}b_{i+5})$$
$$\geqslant 36\left(\frac{M_2}{M_1}R_1^2V_1^2+\frac{M_1}{M_2}R_2^2V_2^2\right). \tag{13}$$

其中

$$M_1=\sum_{i=1}^{3}(S_1-a_ia_{i+3})(S_1-a_{i+1}a_{i+4}),$$
$$M_2=\sum_{i=1}^{3}(S_2-b_ib_{i+3})(S_2-b_{i+1}b_{i+4})$$
$$a_{i+6}\equiv a_i,b_{i+6}\equiv b_i(i=1,2).$$

等式成立当且仅当

$$\frac{b_1b_4}{a_1a_4}=\frac{b_2b_5}{a_2a_5}=\frac{b_3b_6}{a_3a_6}.$$

证明 于不等式(3)中，赋以

$$\alpha_i=(S_1-a_ia_{i+3})(S_1-a_{i+1}a_{i+4}),$$
$$\beta_i=(S_2-b_ib_{i+3})(S_2-b_{i+1}b_{i+4}),i=1,2,3.$$ 又由 Legendre 公式，可得

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=36R_1^2V_1^2,$$
$$\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_3+\beta_3\beta_1=36R_2^2V_2^2.$$

由此立即得到不等式(13). 等式成立的条件可用合分比定理推出，证毕.

定理 6 在定理 4 的条件下，有不等式

$$\sum_{i=1}^{3}b_ib_{i+3}\left(\sum_{j=1}^{3}a_ja_{j+3}-2a_ia_{i+3}\right)$$

$$\geqslant 12\sqrt{3}\left(\frac{b_1b_4+b_2b_5+b_3b_6}{a_1a_4+a_2a_5+a_3a_6}R_1V_1+\frac{a_1a_4+a_2a_5+a_3a_6}{b_1b_4+b_2b_5+b_3b_6}R_2V_2\right);$$

(14)

$$a_1^2b_1^2a_4^2b_4^2+a_2^2b_2^2a_5^2b_5^2+a_3^2b_3^2a_6^2b_6^2$$

$$\geqslant 288\left(\frac{b_1^2b_4^2+b_2^2b_5^2+b_3^2b_6^2}{a_1^2a_4^2+a_2^2a_5^2+a_3^2a_6^2}R_1^2V_1^2+\frac{a_1^2a_4^2+a_2^2a_5^2+a_3^2a_6^2}{b_1^2b_4^2+b_2^2b_5^2+b_3^2b_6^2}R_2^2V_2^2\right). \quad (15)$$

两式中等式成立当且仅当

$$a_1a_4=a_2a_5=a_3a_6$$

且

$$b_1b_4=b_2b_5=b_3b_6.$$

证明 当 $b_1=b_2=\cdots=b_6=1$ 时，有 $V_2=\frac{\sqrt{2}}{12}$，$R_2=\frac{\sqrt{6}}{4}$，于是由不等式(13)，得

$$\left(\sum_{i=1}^{3}a_ia_{i+3}\right)^2-2\sum_{i=1}^{3}a_i^2a_{i+3}^2\geqslant 24\sqrt{3}R_1V_1. \quad (16)$$

等式成立当且仅当

$$a_1a_4=a_2a_5=a_3a_6.$$

在不等式(1)中，令 $n=3,K=2$，并对 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,3)$ 适当地赋值，再利用不等式(16)即可得到不等式(14).

再在不等式(1)中，令 $n=3,K=2$，且

$$\alpha_i=\frac{1}{2}(a_{i+1}^2a_{i+4}^2+a_{i+2}^2a_{i+5}^2),$$

$$\beta_i=b_i^2b_{i+3}^2(i=1,2,3)$$

则由

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{3}a_i^4a_{i+3}^4$$

及 Legendre 公式即可得到不等式(15). 证毕.

定理 7 设 $\sum_A$ 和 $\sum_B$ 是 $n(n\geqslant 3)$ 维 Euclid 空间 E^n 中的两个单形，它们的棱长分别是 $a_i,b_i(i=1,2,\cdots,C_{n+1}^2)$，体积分别为 V_1

和 V_2，记

$$S_\alpha=\sum_{1\leqslant i\leqslant C_{n+1}^2} a_i^\alpha,\quad S_\beta=\sum_{1\leqslant i\leqslant C_{n-1}^2} b_i^\beta,$$

则当 $\alpha,\beta\in(0,2]$时，对任意 $\gamma\in[2,n]$，有不等式

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant i\leqslant C_{n+1}^2} a_i^\alpha\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant C_{n-1}^2} b_j^\beta-\gamma b_i^\beta\Big)\\ &\geqslant\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2\gamma)\left[2^\alpha\left(\frac{(n!)^2}{n+1}\right)^{\frac{\alpha}{n}}\frac{S_\beta}{S_\alpha}V_1^{\frac{2\alpha}{n}}\right.\\ &\left.+2^\beta\left(\frac{(n!)^2}{n+1}\right)^{\frac{\beta}{n}}\frac{S_\alpha}{S_\beta}V_2^{\frac{2\beta}{n}}\right].\end{aligned}\tag{17}$$

等式成立当且仅当 $\sum_A$ 和 $\sum_B$ 均为正则单形.

其证明只需循文[9]的思想方法，先证明不等式

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant C_{n+1}^2} a_i^\alpha\Big)^2-\gamma\sum_{1\leqslant i\leqslant C_{n+1}^2} a_i^{2\alpha}\\ &\geqslant 2^{\alpha-2}n(n+1)(n^2+n-2\gamma)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{\frac{\alpha}{n}}V_1^{\frac{2\alpha}{n}}.\end{aligned}\tag{18}$$

等式成立当且仅当 $\sum_A$ 为正则单形. 然后在不等式(1)中，置 n 为 C_{n+1}^2，并令 $K=\gamma,\alpha_i=a_i^\alpha,\beta_i=b_i^\beta(i=1,2,\cdots,C_{n-1}^2)$，再利用不等式(18)即可得到不等式(17).

不等式(17)统一加强了苏化明、陈计与马援、毛其吉等先生分别于 1986、1987、1989 年所建立的不等式[10,11,12].

我们猜想，不等式(17)中对 γ 的限制可以放宽为 $\gamma\in(0,n]$.

参考文献

[1]Chia-Kuei Peng, Sharpening the Neuberg-Pedoe inequality, 1, Crux Math, 10(1984), 68—69.

[2]杨克昌，匹多不等式的加权推广，初等数学论丛(8)，上海教育出版社，1985.

[3]陈计、马援，Neuberg-Pedoe 不等式的四边形推广，数学通讯，5(1988).

[4]陈计、王振,Neuberg-Pedoe 不等式与 Oppenheim 不等式,初等数学研究论文选,上海教育出版社,1992.

[5]杨世国,关联两个四面体的一类不等式,福建中学数学,1(1990).

[6]唐立华、冷岗松,Pedoe 不等式的空间推广及加强,数学竞赛(18),湖南教育出版社,1994,91—102.

[7][德]H. Dorrie 著,100 个著名的初等数学问题——历史和解,上海科学技术出版社,1982,320—324.

[8]冷岗松,几何不等式证法漫谈,数学竞赛(5),湖南教育出版社,1989,75.

[9]毛其吉,联系两个单形的不等式,数学的实践与认识,3(1989),23—25.

[10]苏化明,关于单形的两个不等式,科学通报,32:1(1987),1—3.

[11]陈计、马援,涉及两个单形的一类不等式,数学研究与评论,2(1989),282—284.

关于 Heilbronn 数一类三角形计数问题(摘要)

苏茂鸣

安徽宣城中学(242000)

设 T 是一个三角形区域，面积为 $|T|$，其 Heilbronn 数定义为：

$$H_n(T)=\max_{P_1,\cdots,P_n\in T}\ \min_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}\{|P_iP_jP_k|\}/|T|,$$

其中 $|P_iP_jP_k|$ 表示 $\triangle P_iP_jP_k$ 的面积，除 $H_3(T)=1$，$H_4(T)=\frac{1}{3}$ 是平凡结论外，杨路、张景中、曾振柄在 1988 年证明了

$$H_5(T)=3-2\sqrt{2}\ ,\ H_6(T)=1/8.$$

本文中，我们对自然数 $n(\geqslant 4)$，实数 $\alpha\in[H_n(T),1]$ 来考虑

$$P_n(T,\alpha)=\min_{P_1,\cdots,P_n\in T}|\{\triangle P_iP_jP_k\,|\,|P_iP_jP_k|\leqslant\alpha,1\leqslant i<j<k\leqslant n\}|.$$

显然 $P_n(T,1)=C_n^3$. 通过对三角形的剖分与讨论，我们得到以下结论(将 $P_n(T,\alpha)$ 简记为 $P_n(\alpha)$)：

$$P_4(\alpha)=\begin{cases}1,\ \alpha\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right);\\ 2,\ \alpha\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

$$P_5(\alpha)=\begin{cases}1 \text{ 或 } 2, & \alpha\in\left[3-2\sqrt{2},\dfrac{1}{4}\right);\\ 3, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right);\\ 4, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right);\\ 6, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

$$P_6(\alpha)=\begin{cases}3, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right);\\ 6,7 \text{ 或 } 8, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right);\\ 9, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right);\\ 10, & \alpha\in\left[\dfrac{4}{9},\dfrac{1}{2}\right);\\ 12, & \alpha\in\left[\dfrac{1}{2},1\right).\end{cases}$$

关于几何不等式
Whcl45 的一般结果(摘要)

孔凡哲

济宁师范专科学校数学系(山东,272125)

探讨“在$\triangle ABC$中$\sum\cos^n\frac{A}{2}(n\in N)$上、下限的估计有没有一般结果”,分别就等腰三角形、一般三角形证明了如下不等式恒成立:

$$\min\left\{2,3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n,1+\frac{2}{\sqrt{2^n}}\right\}\leqslant\sum\cos^n\frac{A}{2}\leqslant\max\{2,f(\alpha_0)\}$$

其中α_0为$\arccos t_0$,t_0为$2^n\cdot(1-t)^{n-2}t^2=1$在$\left(0,\frac{2}{n}\right)\cap(0,1)$上的根.并就$n\in N$的各种情形给出

当$n\leqslant 2$时,$2<\sum\cos^n\frac{A}{2}\leqslant 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$;

当$3\leqslant n\leqslant 6$时,$1+\frac{2}{\sqrt{2^n}}<\sum\cos^n\frac{A}{2}<2$;

当$n\geqslant 7$时,$3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\leqslant\sum\cos^n\frac{A}{2}<2$.

比较圆满地解决了这一问题.

一个几何不等式问题（摘要）

余丹田

福建永春华侨中学(362600)

首届“全国几何不等式研讨会”期间，单墫教授提出问题：

$\triangle ABC$ 中，a 边最大，分别在 AB、AC 上取两点 P、Q，问何时 $PQ\geqslant a$.

下面就此问题给出两个定理.

定理 1 $\triangle ABC$ 中，分别在直线 AB、AC 上取两点 P、Q，则

(1) $CQ\geqslant\frac{abc}{2S}-b$ 或 $CQ\leqslant-\frac{abc}{2S}-b$ 时，$PQ\geqslant a$；

(2) $BP\leqslant c-\frac{abc}{2S}$ 或 $BP\geqslant c+\frac{abc}{2S}$ 时，$PQ\geqslant a$.

其中，点 P 在 BA 方向上，点 Q 在 AC 方向上，BP，CQ 均取正值，反之取负值.

定理 2 $\triangle ABC$ 中，点 P 在线段 AB 内，Q 点在 AC 的延长线上，且 $0<CQ<\frac{abc}{2S}-b$；当

$$\sin\angle PQA\leqslant\frac{c-BP}{2R}$$

(R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径)时，$PQ\geqslant a$.

三角形的一个比例不等式及其应用(摘要)

冯仕虎

江苏江浦县桥林中学(211806)

命题 在$\triangle ABC$中,E、F分别是AC、AB上的点,且设$AE=mAC$,$AF=nAB$,$AB=\lambda AC$,其中$m,n,\lambda\in(0,1)$,$m-n\lambda^2>0$,则

$$\frac{|m-\lambda|}{1-n\lambda}<\frac{BE}{CF}<\frac{m+\lambda}{1+n\lambda}. \tag{1}$$

推论 1 在$\triangle ABC$中,E、F分别是边AC、AB的中点,且$AB=\lambda AC$,其中$\lambda\in(0,1)$,则

$$\frac{|2\lambda-1|}{2-\lambda}<\frac{BE}{CF}<\frac{2\lambda+1}{2+\lambda}. \tag{2}$$

推论 2 在梯形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,若$AD:BC=k$,$AB:CD=\lambda$,且k、$\lambda\in(0,1)$,则

$$\frac{|k-\lambda|}{1-k\lambda}<\frac{BD}{AC}<\frac{k+\lambda}{1+k\lambda}. \tag{3}$$

例 1 在$\triangle ABC$中,已知$AC=3AB$,E、F分别是AC、AB的中点,求证:$BE>\frac{1}{5}CF$.

例 2 在$\triangle ABC$中,已知$AC=2AB$,E是边AC的中点,F是边AB上的任意一点,求证:$BE<CF$.

例 3 在梯形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,若$AD<BC$,$AB<CD$,则$BD<AC$.

关于四面体的几个不等式（摘要）

杨克昌

岳阳大学（湖南，414000）

本文给出涉及四面体体积，表面积与棱长、内切球半径的几个新的不等式.

定理 设四面体 $ABCD$ 的体积为 V，四个面的面积为 S_A，S_B，S_C，S_D，六条棱长为 a,b,c,d,e,f，则

$$(S_A+S_B+S_C+S_D)^2-\frac{4}{3}(S_A{}^2+S_B{}^2+S_C{}^2+S_D{}^2)$$
$$\geqslant 2\sqrt{2}V(a+b+c+d+e+f). \quad (1)$$

当且仅当四面体为正四面体时式中等号成立.

推论 设四面体体积为 V，表面积（即四个面的面积之和）为 S，六条棱长之和为 L，内切球半径为 r，则

$$\frac{S^2}{L}\geqslant 3\sqrt{2}V; \quad (2)$$

$$S\geqslant \sqrt{2}Lr; \quad (3)$$

$$V\geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}Lr^2. \quad (4)$$

当且仅当正四面体时(2)、(3)、(4)式等号成立.

涉及 n 个四面体的两个不等式（摘要）

马统一

甘肃煤炭工业技工学校（730919）

定理 1 设四面体 $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的体积为 V_i，顶点 $A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3},A_{i_4}$ 所对面 $F_{i_1},F_{i_2},F_{i_3},F_{i_4}$ 的面积分别为 $\Delta_{i_1},\Delta_{i_2},\Delta_{i_3},\Delta_{i_4}$，则对任意正数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 有

$$\sum_{j=1}^{4}\prod_{i=1}^{n}\lambda_j\triangle_{ij}^{2\alpha_i}$$

$$\geqslant(3^7/4)^{\frac{\alpha}{3}}\prod_{i=1}^{n}V_i^{\frac{4\alpha_i}{3}}\cdot\frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{\alpha}{3}}}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^{\alpha-1}}.$$

其中 $\alpha_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，并且当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ 且 $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正四面体时等号成立.

定理 2 设 a_i,b_i,c_i,d_i,e_i,f_i 和 V_i 分别为四面体 $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$ 的六条棱长和体积（$i=1,2,\cdots,n$），则对任意正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$，有

$$(\lambda_1+\lambda_2)\prod_{i=1}^{n}a_i^{4\alpha_i}+(\lambda_1+\lambda_3)\prod_{i=1}^{n}b_i^{4\alpha_i}+(\lambda_1+\lambda_4)\prod_{i=1}^{n}c_i^{4\alpha_i}+(\lambda_2+\lambda_3)$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}d_i^{4\alpha_i}+(\lambda_2+\lambda_4)\prod_{i=1}^{n}e_i^{4\alpha_i}+(\lambda_3+\lambda_4)\prod_{i=1}^{n}f_i^{4\alpha_i}$$

$$\geqslant 2^{\frac{10\alpha}{3}} \cdot 3^{\frac{4\alpha}{3}+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} V_i^{\frac{4\alpha_i}{3}} \cdot \frac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{\alpha}{3}}}{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)^{\alpha-1}}.$$

其中 $\alpha_i \in R^+ (i=1,2\cdots n)$，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$，并且当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ 且 $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$均为正面体时式中等号成立.

E^n 中一类三角不等式及其应用(摘要)

张　垚

湖南教育学院数学系(长沙,410012)

定理 1　给定 E^n 中 $N(N>n)$ 个 $n-1$ 维超平面 $F_1,F_2,\cdots,F_N$,用$\overline{e}_i$ 表示 F_i 的单位法向量,$s(2\leqslant s\leqslant n)$个超平面 $F_{i_1},F_{i_2},\cdots,F_{i_s}$所形成的 s-面空间角定义为

$$\alpha_{i_1\cdots i_s}=\arcsin|\det\Gamma(\overline{e}_{i_1},\cdots,\overline{e}_{i_s})|^{\frac{1}{2}},$$

其中 $\Gamma(\overline{e}_{i_1},\cdots,\overline{e}_{i_s})$表示向量$\overline{e}_{i_1},\cdots,\overline{e}_{i_s}$的 Gram 矩阵. 令

$$\overline{N}_0=1,\overline{N}_1=\sum_{i=1}^{N}x_i\neq 0,$$

$$\overline{N}_s=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant N}x_{i_1}\cdots x_{i_s}\sin^2\alpha_{i_1\cdots i_s}$$

这里,$2\leqslant s\leqslant n,x_1,\cdots,x_N$ 为实数,那么

1°　当 $x_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant N)$时,有

$$\overline{N}_k^l\geqslant\frac{[(n-l)!\ l!]^k}{[(n-k)!\ k!]^l}(n!)^{l-k}\overline{N}_l^k\quad(1\leqslant k<l\leqslant n);\tag{1}$$

$$\overline{N}_k^2\geqslant\frac{k+1}{k}\cdot\frac{n+1-k}{n-k}\overline{N}_{k-1}\overline{N}_{k+1}\quad(1\leqslant k\leqslant n-1).\tag{2}$$

2°　当 $x_i(1\leqslant i\leqslant N)$为任意实数时,(2)仍成立.

并且(1)、(2)中等号成立的充要条件是下列诸等式都成立:

$$\cos\theta_{ij}=\frac{n}{N_1}\sum_{k=1}^{N}x_k\cos\theta_{ik}\cos\theta_{kj}\quad (i,j=1,2,\cdots,N). \tag{3}$$

当 $N=n+1$ 时,(3)可简化为

$$\frac{x_k}{N_1}=\frac{\cos\theta_{ij}}{n(\cos\theta_{ij}-\cos\theta_{ik}\cos\theta_{kj})} \tag{4}$$

其中 i,j,k 互不相等,$i,j,k=1,2,\cdots,n+1$,$\theta_{ij}=\theta_{ji}$
$=\begin{cases}0 & (i=j)\\ \vec{e}_i\hat{,}\vec{e}_j & (i\neq j)\end{cases}$.

从(1),(2)可导出一系列新的三角不等式及几何不等式.

关于高维单形内径的一类几何不等式(摘要)

冷岗松　唐立华

湖南教育学院数学系(长沙,410012)
湖南长沙市第一中学(410000)

本文将建立高维单形与其子单形内切球半径之间的一类递推不等式,并给出一个有趣的应用.

设 $\tau=\{A_0,A_1,\cdots,A_n\}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的 n 维单形 Ω 的顶点集,Ω 的内切球半径为 r,Ω 的 $n-1$ 维界面子单形(即由顶点集 $\{A_0,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots A_n\}$ 所支撑的 $(n-1)$ 维单形)Ω_i 的内切球半径为 r_i,$i=0,1,2,\cdots,n$. 则我们的结果可简洁地表述为如下定理.

定理 1
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{r_i^2}\leqslant\frac{n-1}{r^2}. \tag{1}$$
当且仅当 Ω 为正则单形时等号成立.

设 Ω 是 n 维欧氏空间 E^n 中 [illegible] 别是 Ω 的外接球半径与内切球半径,P 是 [illegible] …,d_i 表示 P 点到 Ω 的 $(n-1)$ 维界面 Ω_i 的距离,$i=0,1,\cdots n$.

应用定理 1,我们可证明下面有趣的不等式:

定理 2
$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{d_i^{2(n-1)}}\geqslant\frac{2}{r^{2(n-1)}}+\frac{(n-1)n^{2(n-1)}}{R^{2(n-1)}}. \tag{2}$$
等号当且仅当 Ω 是正则的且 P 为其内心时成立.

有关单形旁切球的几何不等式（摘要）

林　波

扬州大学师范学院数学与计算机科学系（江苏，225002）

设 $\Delta_n=<P_0,P_1,\cdots,P_n>$ 为 E^n 中单形，顶点 P_i 对应的高线长 h_i、$n-1$ 维侧面积 V_i，旁切球半径 r_i，Δ_n 的内切球半径 r. 本文主要结果表述如下：

定理 1　n 维单形 Δ_n 的体积 V 与旁切球半径间满足不等式

$$V\geqslant C(n)\left(\prod_{i=0}^{n}r_i\right)^n\Big/\left(\sum_{i=0}^{n}r_i\right)^{n^2}. \tag{1}$$

其中

$$C(n)=(n+1)^{\frac{2n^2-n+1}{2}}(n-1)^n\left[n^{n-2}/(n-1)!^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

仅与维数 n 有关，等号当 Δ_n 正则时成立.

推论 1　Δ_n 的内切球半径与旁切球半径满足

$$\prod_{i=0}^{n}r_i\geqslant\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+1}r^{n+1}. \tag{2}$$

等号当且仅当 Δ_n 的 $n-1$ 维侧面积 V_i 相等时成立.

推论 2　Δ_n 的高线长与旁切球半径及内切球半径间有不等式

$$r_i^{n-1}h_i^2\geqslant(n-1)^2\left(1-\frac{2}{n-1}\right)^{n+1}r^{n+1}\quad(i=0,1,\cdots,n). \tag{3}$$

等号当且仅当 Δ_n 的 $n-1$ 维侧面积 V_i 相等时成立.

定理 2　对单形 Δ_n，其旁心构成的单形 $\Delta_n^*=<I_0,I_1,\cdots,I_n>$

的体积 V^* 与 Δ_n 的体积 V 及内切球半径 r 间有不等式

$$V^* V^{\frac{3n+1}{n(n-1)}} \geqslant \frac{2^n (n+1)^{\frac{(n-1)^3}{2n(n-1)}}}{(n-1)^n} \left[\frac{n^{n-2}}{(n-1)!^2}\right]^{\frac{(n-1)^2}{2n(n-1)}} r^{\frac{(n+1)^2}{n-1}}. \qquad (4)$$

等号当 Δ_n 正则时成立.

推论 3 对 n 维等面单形 Δ_n(即各 $n-1$ 维侧面积相等的单形),有

$$V^* = (2/n-1)^n V.$$

即 V^* 与 V 之比是一个与 n 有关的常数.

关于单形的三个几何不等式(摘要)

杨世国　王　佳

安徽教育学院数学系(合肥,230061)
西南师范大学数学系(重庆,630715)

本文中约定 n 维欧氏空间 E^n 中 n 维单形 Ω_n 的顶点为 $A_i(i=0,1,\cdots,n)$,顶点 A_i 所对侧面 F_i 的 $n-1$ 维体积为 V_i,侧面 F_i($n-1$ 维单形)的外接 $n-2$ 维超球面半径为 ρ_i,单形 Ω_n 的体积、外接超球面半径、内切超球面半径依次为 V,R,r. 设 P 与 D 是单形 Ω_n 内部任意两点,点 P 到顶点 A_i 之距离记为 R_i,点 D 到侧面 F_i 之距离记为 r_i,$n+1$ 个正数 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$的 k 次对称多项式记为 $\sigma_k(x_i)$,即

$$\sigma_k(x_i)=\sum_{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sum\cdots\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

在上述约定之下,本文获得单形的下述三个新的几何不等式.

定理 1　$V^2\leqslant\frac{(n+1)^n}{n!^2\cdot n^n}\sigma_n(R_i^2).$　　(1)

等号成立当且仅当 Ω_n 为正则单形且 P 与 Ω_n 之外心 O 重合.

定理 2　$\sigma_n(R_i^2)\geqslant\frac{n^{2n}}{n+1}\sigma_n^2(r_i).$　　(2)

等号成立当且仅当 Ω_n 为正则单形且点 P 与 D 分别与 Ω_n 之外心 O 和内心 I 重合.

定理 3　若 n 维单形 Ω_n 的外心 O 在其内部,则有

$$\sigma_n\left(\sqrt{1-\frac{\rho_i^2}{R^2}}\right)\leqslant\frac{n+1}{n^{2n}}.$$

等号成立当且仅当 Ω_n 为正则单形.

特别地，当单形 Ω_n 的外心 O 在其内部时，取点

为 Ω_n 之外心与内心，此时有 $R_i=R, r_i=r(i=0,1$

不等式(1)、(2)便得两个结果：

$$V\leqslant\frac{(n+1)^{(n-1)/2}}{n!\cdot n^{n/2}}R^n; \tag{4}$$

$$R\geqslant nr. \tag{5}$$

(4)、(5)中等号当且仅当 Ω_n 为正则单形时成立.

关于 Alexander 猜想的一个逆向不等式及其应用(摘要)

林　波

扬州大学师范学院数学与计算机科学系(江苏,225002)

设 $\Delta_n=<P_0,P_1,\cdots,P_n>,\Delta_n'=<P_0',P_1',\cdots,P_n'>$是 E^n 中两个单形,构作第三个单形 $\Delta_n''=<P_0'',P_1'',\cdots,P_n''>$,使得它们的顶点间距离满足

$$|P_i''-P_j''|^2=|P_i-P_j|^2+|P_i'-P_j'|^2\quad(i,j=0,1,\cdots,n),$$

称 Δ''是 Δ_n 与 Δ_n'的度量加.本文中证明了下列结论.

定理　设 Δ_n''是 n 维单形 Δ_n,Δ_n'的度量加,Δ_n,Δ_n'的 Gram 矩阵的特征值在区间$[m,M]$上.

(1)$\Delta_n,\Delta_n',\Delta_n''$的体积 V,V',V''满足

$$V''^{\frac{2}{n}}\leqslant\left(\frac{m}{M}\right)^{\frac{1-n}{n}}\left(V^{\frac{2}{n}}+V'^{\frac{2}{n}}\right);$$

(2)$\Delta_n,\Delta_n',\Delta_n''$的顶点角 $\alpha_i,\alpha_i',\alpha_i''$满足

$$\sin^2\alpha_i''\leqslant 2^{n^2-n-1}\left(\frac{M}{m}\right)^{(n-1)^2}(\sin^2\alpha_i+\sin^2\alpha_i')\quad(i=0,1,\cdots,n);$$

(3)$\Delta_n,\Delta_n',\Delta_n''$的内切球半径 r,r',r''满足

$$r''^2\leqslant 2^{n-2}(n+1)\left(\frac{m}{M}\right)^{1-n}(r^2+r'^2);$$

(4)$\Delta_n,\Delta_n',\Delta_n''$的高线 h_i,h_i',h_i''满足

$$h''^2_i \leqslant 2^{n-1}\left(\frac{m}{M}\right)^{1-n}(h_i^2+h'^2_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n);$$

(5)$\Delta_n,\Delta_n',\Delta_n''$的重心 G,G',G''的内顶角 $\beta_i,\beta_i',\beta_i''$满足

$$\sin^2\beta_i'' \leqslant 2^{n-1}\left(\frac{m}{M}\right)^{1-n}(\sin^2\beta_i+\sin^2\beta_i') \quad (i=0,1,2,\cdots,n).$$

第　Ⅱ　篇

关于有限点集的一类几何不等式*

杨 路 张景中

中国科学技术大学数学系**(合肥,230026)

§1 引 言

设 $P_1,P_2,\cdots,P_N$ 是正 N 边形 S_N 的顶点,所有线段 P_iP_j 之长的平方和 $\sum r_{ij}^2$ 记为 N_1;所有三角形 $\Delta P_iP_jP_k$ 的面积平方和 $\sum\Delta_{ijk}^2$ 记为 N_2. 对 $N=3,4,\cdots$ 进行计算表明,总有

$$\frac{N_1^2}{N_2}=16N;$$

若 S_N 是正多面体,则有

$$\frac{N_1^2}{N_2}=12N.$$

这些有趣的事实启发我们考虑:m 维空间 E^m 中的点集 $\sigma_N=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}$ 的两个不变量 N_1,N_2 之间有什么关系? 易证

$$\frac{N_1^2}{N_2}\geqslant\frac{8m}{m-1}N, \tag{1.1}$$

---

* 本文发表在《数学学报》5(1980). 收稿日期:1978 年 4 月 24 日.

** 本文发表时作者的所在单位. 下同.

而等号当 σ_N 具有某种对称性时成立.

更一般地，任取 σ_N 中的 $k+1$ 个点，以它们为顶点作一个 k 维单形，把所有这些 k 维单形的 k 维体积的平方和记作 $N_k(k=1,2,\cdots,m)$；可以证明诸如此类的不等式：

$$\frac{N_1^3}{N_3}\geqslant\frac{216m^2}{(m-1)(m-2)}N^2, \tag{1.2}$$

$$\frac{N_1N_{m-1}}{NN_m}\geqslant m^4, \tag{1.3}$$

$$N_{m-1}^2\geqslant 2\left(\frac{m}{m-1}\right)^3 N_mN_{m-2}; \tag{1.4}$$

在三维空间，有

$$N_1N_2\geqslant 81NN_3,\quad N_2^2\geqslant\frac{27}{4}N_1N_3$$

等等.

本文将给出这类不等式的更一般的形式，并找出等号成立的充要条件. 我们将看到：诸不变量 N_k 和 σ_N 的惯量椭球和密集椭球有关.

密集椭球与惯量椭球的概念，常见于统计学与力学中. 为方便这里重新给出密集椭球的定义.

定义 1.1 设 σ 是 E^m 中有限点集，H 是经过 σ 的重心 O 的任一个 $(m-1)$ 维超平面；把 σ 中各点到 H 的距离平方和 I_H 叫做 σ 关于 H 的转动惯量；过 O 引 H 的法线，在 H 两侧法线上截取等长线段 $P_HO=P'_HO=\left(\sqrt{I_H}\right)^{1}$，所有这些 P_H, P'_H 的轨迹是一个 $m-1$ 维椭球面*，与这个椭球共主轴，而诸半轴为此椭球对应半轴之倒数的椭球，叫 σ 的密集椭球. 显然，二者中一个为球时另一个也是球. 这时有

---

* 特殊情况下，椭球的某几个半轴为 0，则它退化为更低维的椭球面.

定义 1.2 若 σ 的密集椭球是一个球，则称 σ 是惯量等轴的.

本文主要结果是

定理 对 E^m 中点集 $\sigma_N=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}(N>m)$ 的诸不变量 $\{N_k\}$，有不等式

$$\frac{N_k^l}{N_l^k}\geqslant\frac{[(m-l)!\,(l!)^3]^k}{[(m-k)!\,(k!)^3]^l}(m!\,N)^{l-k}\quad(1\leqslant k<l\leqslant m)；\quad(1.5)$$

$$N_k^2\geqslant\left(\frac{k+1}{k}\right)^3\cdot\frac{m-k+1}{m-k}\cdot N_{k-1}N_{k+1},\quad(1\leqslant k\leqslant m,N_0=N).$$

(1.6)

其等号，当且仅当 σ 惯量等轴时成立.

从(1.5)、(1.6)中取特例和作变换，易导出包括(1.1)—(1.4)在内的许多几何不等式，其等号都是当且仅当 σ 为惯量等轴时成立.

取(1.5)的最简单的情况：$m=2,N=3$，得到三角形的三边平方和与面积 Δ 之间的关系

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,\Delta.\quad(1.7)$$

不等式(1.7)早已被发现(Weitzenboeck, Math. Zeit., 5 (1919), 137—146)，后来又有人提供了不同的证明(Finsler 等, Math. Helv, 10(1937), 316—326)；近期又有人回顾了(1.7)并把它推广成为联系着两个三角形的面积与边长的一个不等式[1-2]

$$(-a_1^2+a_2^2+a_3^2)a_1'^2+(a_1^2-a_2^2+a_3^2)a_2'^2+(a_1^2+a_2^2-a_3^2)a_3'^2$$
$$\geqslant 16\Delta\Delta'.\quad(1.8)$$

但是，由(1.7)是不易看出它会自然推广为(1.1)那样的一类不等式的. 因此，尽管(1.7)早经发现并几乎众所周知，长期以来，却未见有人提出过如(1.1)的猜想.

至于不等式(1.8)，它的发现者 D. Pedoe 没有指出有何应用或怎样向高维情形推广，本文提供的方法对解决这些问题也是有效的，将于另文中述及.

§2 两个引理

我们把 E^m 中的点和 $m-1$ 维定向超平面都叫做 E^m 的基本元素；用 e_i 记基本元素．有限个基本元素之集 $\sigma_k=\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 叫 k 元基本图形．

用 $\rho(e_i,e_j)$ 表示两点 e_i,e_j 的距离，$\widehat{e_ie_j}$ 表两超平面 e_i,e_j 之夹角．若 e_i,e_j 中一个为点，另一个为面，则以 $d(e_i,e_j)$ 记点到面的带号距离，并引入

定义 2.1 E^m 中两个基本元素 e_i,e_j 之间的抽象距离定义为

$$g_{ij}=g(e_i,e_j)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\rho^2(e_i,e_j) & (\text{若 } e_i,e_j \text{ 都是点})；\\ \cos\widehat{e_ie_j} & (\text{若 } e_i,e_j \text{ 都是超平面})；\\ d(e_i,e_j) & (\text{若 } e_i,e_j \text{ 一为点，一为面}).\end{cases}$$

下述定理揭示出基本图形诸元间相关性：

引理 2.1 设 $\sigma_N=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$ 是 E^m 中的基本图形，令 $\delta_i=1-g_{ii}$，并令

$$P[\sigma_N]=P(e_1,e_2,\cdots,e_N)=\begin{vmatrix}0 & \delta_1\cdots\delta_N\\ \delta_1 & \\ \vdots & g_{ij}\\ \delta_N & \end{vmatrix}$$

则当 $N>m+1$ 时，有

$$P(e_1,e_2,\cdots,e_N)=0. \tag{2.1}$$

证明 若 σ_N 中没有点，(2.1)显然．

不失一般性，设 $e_1,e_2,\cdots,e_l$ 是面，$e_{l+1},e_{l+2},\cdots,e_N$ 是点，$l<N$；取 e_N 为笛卡尔坐标原点．设 $e_1,e_2,\cdots,e_l$ 的单位法向量为 $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\cdots,\bar{a}_l$；由 e_N 引至 $e_{l+1},e_{l+2},\cdots,e_N$ 的向量为 $\bar{a}_{l+1},\bar{a}_{l+2},\cdots,\bar{a}_N$．又设由 e_N 垂直引至 $e_1,e_2,\cdots,e_l$ 的向量为 $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_l$．则有

当 $1\leqslant i\leqslant l,1\leqslant j\leqslant l$ 时，$g_{ij}=\bar{a}_i\cdot\bar{a}_j$；

当 $1\leqslant i\leqslant l,l<j\leqslant N$ 时，$g_{ij}=\bar{a}_i(\bar{a}_j-\bar{b}_j)$.

此时 $P[\sigma_N]$可表为

$$P(e_1,e_2,\cdots,e_N)$$

$$=\left|\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \bar{a}_i\cdot\bar{a}_j \\ 0 & & \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \bar{a}_i(\bar{a}_j-\bar{b}_j) & \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 1 & \\ \vdots & \bar{a}_j(\bar{a}_i-\bar{b}_j) \\ 1 & \end{matrix} & -\dfrac{(\bar{a}_i-\bar{a}_j)^2}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\right\} i=1,2,\cdots,l \\ \\ \left.\right\} i=l+1,l+2,\cdots,N \end{array}$$

$$\underbrace{\qquad}_{j=1,2,\cdots,l,}\quad\underbrace{\qquad}_{j=l+1,l+2,\cdots,N}$$

对上式作如下不改变行列式值的变换：对 $k\leqslant l$，把第 0 行（列）乘$\bar{a}_k\cdot\bar{b}_k$ 加到第 k 行（列）上；对 $k>l$，把第 0 行（列）乘$\frac{1}{2}\bar{a}_k^2$ 加到第 k 行（列）上；得到

$$P(e_1,e_2,\cdots,e_N)=\left|\begin{array}{c:c} 0 & \delta_1\quad\delta_2\cdots\delta_N \\ \hdashline \begin{matrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_N\end{matrix} & \bar{a}_i\cdot\bar{a}_j \end{array}\right|$$

但$\bar{a}_N=0$，故末行（列）除 $\delta_N=1$ 外均为 0，故得

$$P(e_1,e_2,\cdots,e_N)=(-1)\,|(\bar{a}_i\cdot\bar{a}_j)|\quad(i,j=1,2,\cdots,N-1).$$

设$\bar{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{im})$，由于 $N>m+1$，以及在笛卡尔坐标系中的内积公式

$$\bar{a}_i\cdot\bar{a}_j=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}\cdot a_{jk}$$

得到

$$P[\sigma]=(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m} & 0\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{N-11}\cdots & a_{N-1m} & 0\cdots 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{21}\cdots a_{N-11} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{1m}\ a_{2m}\cdots a_{N-1m} \\ 0\cdots\cdots 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ 0\cdots\cdots 0 \end{vmatrix}=0.$$

引理 2.1 证毕.

在引理 2.1 中取 $l=0$ 的特例,可导出

Cayley 定理[3] E^m 中任意 N 个点 $P_1,P_2,\cdots,P_N$ 的 Cayley-Menger 行列式

$$D(P_1,P_2,\cdots,P_N)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \rho_{ij}^2 & \\ 1 & & & \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (i,j=1,2,\cdots,N) \\ (\rho_{ij}=|\overline{P_iP_j}|) \end{matrix} \tag{2.2}$$

当 $N>m+1$ 时,其值为 0.

灵活运用 Cayley 定理,能解决一些从别的途径很难入手的几何问题,如[4]中所述就是一例. 而引理 2.1 显然比 Cayley 定理更便于应用. 例如由(2.1)很容易导出单形高线公式:

设 $\sigma_{m+1}=\{P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}\}$是 E^m 中单形的顶点之集,e 是由 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 决定的超平面,求由 P_{m+1} 到 e 的高线 $h=d(P_{m+1},e)$.

考虑 $m+2$ 元基本图形 $\sigma^*=\{P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e\}$;由(2.1)得到

$$P[\sigma^*]=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & & & & 0 \\ \vdots & & g_{ij} & & \vdots \\ 1 & & & & h \\ 0 & 0 & \cdots 0 & h & 1 \end{vmatrix}=0,$$

把此式对末行末列展开,得

$$h^2=d^2(P_{m+1},e)=\frac{P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1})}{P(P_1,P_2,\cdots,P_m)}. \tag{2.3}$$

从(2.3)出发，用数学归纳法易得单形体积公式

$$V^2(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1})=\frac{1}{(m!)^2}P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}). \tag{2.4}$$

这公式是早有的[5]，曾用 Cayley-Menger 行列式表达：

$$V^2(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1})=\frac{(-1)^{m+1}}{2^m(m!)^2}\cdot D(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}). \tag{2.5}$$

下面，再建立一个代数恒等式.

设 A 为 n 阶行列式，$1\leqslant s<n$，从 A 中去掉了 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行和 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 列所得之行列式记为 $A_{\substack{i_1j_1\\i_2j_2\\\vdots\;\vdots\\i_sj_s}}$，而这些行列相交处元素构成的行列式记为 $A_{\substack{i_1i_2\cdots i_s\\j_1j_2\cdots j_s}}$；于是有

引理 2.2*　设 B 是由行列式 A 的各元素的余子式构成的行列式，则

$$B_{\substack{i_1i_2\cdots i_s\\j_1j_2\cdots j_s}}=A_{\substack{i_1j_1\\i_2j_2\\\vdots\;\vdots\\i_sj_s}}\cdot A^{s-1}. \tag{2.6}$$

证明　设使(2.6)成立的所有矩阵之集为 M，我们应证明 M 是全体矩阵之集. 易验证，若(A)为对角型矩阵，$(A)\in M$.

然后，逐条验证：

1°　若$(A)\in M$，用任意 λ 乘(A)的某行(列)得到$(\tilde{A})$，则$(\tilde{A})\in M$.

2°　若$(A)\in M$，把(A)的某相邻两行(列)互换后得到$(\tilde{A})$，则$(\tilde{A})\in M$.

---

* 这个命题在[7]中已有，但证法与此处不同.

3° 若$(A)\in M$，把(A)的某行(列)加到另一行(列)后得到$(\tilde{A})$，则$(\tilde{A})\in M$.

即 M 对初等变换封闭，从而 M 是全体矩阵之集. 这就证明了引理 2.2.

从而立即可以得到

推论 2.1 若(A)是对称矩阵而(A^*)是(A)的伴随矩阵，即(A^*)的元素是(A)中对应元素的代数余子式，则

$$A^*_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_s \\ j_1 j_2 \cdots j_s}} = (-1)^{i+j} A_{\substack{i_1 j_1 \\ i_2 j_2 \\ \vdots \ \ \vdots \\ i_s j_s}} \cdot A^{s-1};$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_s=i, j_1+j_2+\cdots+j_s=j) \tag{2.7}$$

这个等式 § 3 中将用到.

把引理 2.1 与引理 2.2 配合使用，解决一些几何问题是很方便的. 例如，已知单形诸棱长计算它的各个二面角：

设 E^m 中某个单形顶点之集 $\sigma_{m+1}=\{P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}\}$；每个点 P_k 所对的超平面记为 e_k；$d(P_k,e_k)=d_k$，求 e_i，e_j 所成之二面角的余弦 $\cos\theta_{ij}$.

考虑 $m+3$ 元基本图形 $\sigma_{m+1}^{ij}=\{P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e_i,e_j\}$，对行列式 $P[\sigma_{m+1}^{ij}]$使用引理 2.2；由引理 2.1 知 $P[\sigma_{m+1}^{ij}]=0$. 故

$$P^*[\sigma_{m+1}^{ij}]_{\substack{m+2,m+3\\ m+2,m+3}}=0, \text{(行列号码由 0 开始)}$$

把上式展开得到

$$P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e_i)P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e_j)$$

$$-\begin{vmatrix} \begin{array}{|c|}\hline \quad P[\sigma_{m+1}] \quad \\ \hline\end{array} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \end{matrix} \\ 0 \quad 0 \quad \cdots \quad d_j \cdots & \cos\theta_{ij} \end{vmatrix}^2 = 0.$$

但 $P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e_i)=0$(引理 2.1)，故得

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 \\ 1 & & & & 0 \\ \vdots & & g_{ij} & & \vdots \\ & & & & d_i \\ 1 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_j \cdots & \cos\theta_{ij} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.8}$$

将(2.8)对末行末列展开，得

$$\cos\theta_{ij} = d_i d_j \frac{A_{ij}}{A}, \tag{2.9}$$

这里 $A = P[\sigma_{m+1}]$，A_{ij}表示 A 的对应于 g_{ij}的代数余子式. 再应用高线公式(2.3)可得

$$\cos\theta_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sqrt{A_{ii}} \cdot \sqrt{A_{jj}}}. \tag{2.10}$$

等式(2.9)在§3中也将用到.

等式(2.10)中的 θ_{ij}，可以看作是单纯形的诸外角(将各超平面适当地定向)；稍微改变一下形式就得到.

高维余弦定理 设 E^m 中某个单形的诸内角为 φ_{ij}，单形的 Cayley-Menger 行列式是 D，则成立着下列公式

$$\cos\varphi_{ij} = -\frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{ii}} \cdot \sqrt{D_{jj}}} \quad (i,j=1,2,\cdots,m+1). \tag{2.11}$$

高维余弦公式(2.11)在计算问题上有广泛的应用，也可以用来推导某些理论上的结果. 限于篇幅兹不赘述.

§3 密集椭球与$\{N_K\}$之关系

下述定理揭示出密集椭球与$\{N_K\}$之关系.

预备定理 E^m 中点集 $\sigma_N = \{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$ $(N > m)$的诸不变量$\{N_K\}$与 σ_N 的密集椭球诸半轴的平方 $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_m^2$ 之间有关系

$$N_k=\frac{N}{(k!)^2}\cdot\varepsilon_k(a_1^2,a_2^2,\cdots,a_m^2)\quad(k=1,2,\cdots,m),\qquad(3.1)$$

这里 ε_k 是 k 次初等对称函数. 或者说,$a_1^2,a_2^2,\cdots,a_m^2$ 是方程

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(k!)^2N_kx^{m-k}=0\quad(N_0=N)\qquad(3.2)$$

的根.

证明 把 σ_N 看成 E^{mN}中的点,则(3.1)两端都是定义于 E^{mN} 上的连续函数. 当 $N=m+1$ 时,对应于 E^m 中非退化单形顶点集的 σ_N 在 E^{mN}中稠密;故只要证明(3.1)当 σ_N 是非退化单形顶点之集时成立,即可断言它对 $N=m+1$ 普遍成立.

而当 $N>m+1$ 时,可以把 σ_N 看成是 E^{N-1}中的点集,由(3.1)在 E^{N-1}中成立推知它在 E^m 中成立. 这是因为,诸不变量当 σ_N 由 E^{N-1}中退化到 E^m 中时,除了 $N-1-m$ 个化为 0 外,其余均不变.

下面设 $N=m+1$,$\{P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}\}$是 E^m 中非退化单形顶点之集,往证(3.1).

任取 E^m 中的一个 $m-1$ 维定向超平面 e,令 $h_i=d(P_i,e)$,由引理 2.1

$$P(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1},e)=\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&0\\1&&&&h_1\\\vdots&&g_{ij}&&\vdots\\1&&&&h_{m+1}\\0&h_1&\cdots&h_{m+1}&1\end{vmatrix}=0.\qquad(3.3)$$

令 $P[\sigma_{m+1}]=A$,以 A_{ij}记 A 的对应于 g_{ij}的代数余子式,将(3.3)对末行末列展开,得

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1}A_{ij}h_ih_j=A.\qquad(3.4)$$

由于 σ_{m+1}是非退化单形顶点之集,由(2.4)可知 $A\neq0$,故(3.4)可写成

$$\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{m+1}\frac{A_{ij}}{A}h_ih_j=1. \tag{3.5}$$

亦即,任一超平面 e 与 $P_1,P_2,\cdots,P_{m+1}$ 的距离 $h_1,h_2,\cdots,h_{m+1}$ 满足(3.5).

反之,我们指出:对任一组满足(3.5)的实数 $\{h_k\}$,均有一超平面 e 使 $d(P_k,e)=h_k$.

令 $h_k^*=h_k-h_{m+1}$,我们先找到一个超平面 e^*,使 $d(P_k,e^*)=h_k^*$,然后,将 e^* 沿自己的法线向负侧作距离为 h_{m+1} 的平移,即得 e.

显然,$\{h_k^*\}$ 也满足约束(3.5),这只要在(3.3)中把第0行(列)乘以 $-h_{m+1}$ 加到末行即易得出.

以 e_k 记 σ_{m-1}/P_k 的诸点所决定的超平面;$\overline{a}_k$ 记 e_k 的单位法向量;

$$\overline{a}_i\cdot\overline{a}_j=\cos\widehat{e_ie_j}=\cos\theta_{ij};$$

又记由 P_{m+1} 引向 P_k 之向量为 $\overline{P}_k$,则

$$d_k=d(e_k\cdot P_k)=\overline{a}_k\cdot\overline{P}_k\quad(k=1,2,\cdots,m)$$

而对 $i\neq j$,则有 $\overline{a}_i\cdot\overline{P}_j=0$.

取

$$\overline{a}=\sum_{k=1}^{m}\frac{h_k^*}{d_k}\cdot\overline{a}_k$$

则有(用到(2.9))

$$|\overline{a}|^2=\overline{a}^2=\sum_{i}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{a}_i\cdot\overline{a}_j}{d_i\cdot d_j}\cdot h_i^*h_j^*=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{A_{ij}}{A}\cdot h_i^*h_j^*=1.$$

故 $\overline{a}$ 为单位向量,取 $\overline{a}$ 为单位法向量过 P_{m+1} 作超平面 e^*,则

$$d(e^*,P_{m+1})=0=h_{m-1}^*,$$

$$d(e^*,P_k)=\overline{a}\cdot\overline{P}_k=\sum_{i=1}^{m}\frac{h_i^*}{d_i}\overline{a}_i\cdot\overline{P}_k=h_k^*.$$

把 e' 沿方向 $\bar{a}$ 平移 $-h_{m+1}$，即得所求的 e.

在(3.3)左端，把第0行(列)乘 t 加到第 N 行(列)上，等式仍成立. 可见当 $(h_1,\cdots,h_{m+1})$ 满足(3.5)时，$(h_1+t,h_2+t,\cdots,h_{m+1}+t)$ 亦满足(3.5)；因而，若把 $(h_1,h_2,\cdots,h_{m+1})$ 看成 E^N 中的点，则(3.5)表示 E^N 中的以原点为中心的二阶柱面，柱面母线方向向量为

$$\bar{J}=(1,1,\cdots,1).$$

从而超平面(E^N 中的 $N-1$ 维子空间)

$$H: h_1+h_2+\cdots+h_{m+1}=0$$

与柱面(3.5)正交.

在 E^m 中考虑任一过 σ_N 之重心的 $m-1$ 维超平面 e，它所对应的 $(h_1,h_2,\cdots,h_{m+1})$ 显然满足 $h_1+\cdots+h_{m+1}=0$，反之亦然. 因此，求 σ_N 的密集椭球的诸半轴平方 $a_1^2,\cdots,a_m^2$ 的问题，也正是约束(3.5)及 $\sum_{i=1}^{m+1}h_i=1$ 下，求目标函数 $\sum_{i=1}^{m+1}h_i^2$ 的稳定值问题. 但由于(3.5)是柱面，而 $\sum_{i=1}^{m+1}h_i=0$ 恰为过原点而与(3.5)柱面正交的超平面，从而对目标函数 $\sum_{i=1}^{m+1}h_i^2$ 而言，条件 $\sum_{i=1}^{N}h_i=0$ 可以略去(因为不难算出：$\sum_{i=1}^{N}h_i^2$ 沿方向 $\bar{J}$ 的偏导数当且仅当 $\sum_{i=1}^{N}h_i=0$ 时才为0).

因此，在约束(3.5)下求 $\sum_{i=1}^{m+1}h_i^2$ 的稳定值的问题，等价于求 σ_N 的密集椭球诸半轴的平方. 按照拉格朗日乘子法，这些稳定值应当是(3.5)左端二次型的矩阵 $\left[\frac{A_{ij}}{A}\right]$ 的非0特征值的倒数. 设 $B=[A_{ij}]$ 的非0特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots$，则

$$a_k^2=\frac{A}{\mu_k}. \tag{3.6}$$

将 B 的特征方程 $|B-\mu E|=0$ 展开，得

$$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^{m+1-k}B_k\mu^{m+1-k}=0. \tag{3.7}$$

这里

$$B_0=1,B_k=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\left|B_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ j_1,j_2,\cdots,j_k}}\right| \quad (k=1,2,\cdots,m+1). \tag{3.8}$$

若以 $[A]$ 记 $P[\sigma_N]=A$ 所对应的矩阵，并约定 $[A]$ 和 $[A]^*$ 的行列足标由 0 开始，那么，$[A]$ 去掉第 0 行第 0 列后得 B. 由引理 (2.2)

$$\left|B_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ j_1,j_2,\cdots,j_k}}\right|=\left|[A]^*_{\substack{i_1,i_2,\cdots,i_k\\ j_1,j_2,\cdots,j_k}}\right|=\left|[A]_{\substack{i_1j_1\\ i_2j_2\\ \vdots\\ i_kj_k}}\right|A^{k-1},$$

对 $k=1,2,\cdots,m$ 应用体积公式(2.4)，得

$$\begin{aligned}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}\left|B_{\substack{i_1i_2\cdots i_k\\ j_1j_2\cdots j_k}}\right|&=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_{N-k}}P(P_{j_1},P_{j_2},\cdots,P_{j_{N-k}})A^{k-1}\\ &=-((m-k)!)^2N_{m-k}A^{k-1}\\ &(k=1,2,\cdots,m).\end{aligned} \tag{3.9}$$

在上式中 $N_0=m+1$，而且由引理 2.2 得到 $B_{m+1}=0$. 把这些结果代入(3.7)，得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{m}(-1)^kB_k\mu^{m+1-k}\\ &=\mu^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}((m-k)!)^2N_{m-k}A^{k-1}\mu^{m+1-k}=0,\end{aligned}$$

两端除以 A^m，得

$$A\cdot\left(\frac{\mu}{A}\right)^{m+1}+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}((m-k)!)^2N_{m-k}\left(\frac{\mu}{A}\right)^{m+1-k}=0.$$

此方程有一个 0 根；约去 0 根，将它变为 $\frac{A}{\mu}$ 的方程，并注意到

$$A=-(m!)^2N_m,$$

即得

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k((m-k)!)^2 N_{m-k}\left(\frac{A}{\mu}\right)^k=0.$$

即$\frac{A}{\mu}$满足(3.2). 也就是说(3.2)的诸根是密集椭球诸半轴的平方.

预备定理证毕.

§4 定理的证明

由 Maclaurin 定理[6],对 m 个正实变元的 k 次和 l 次初等对称函数 ε_k 与 ε_l 有不等式

$$\left[\frac{k!\ (m-k)!}{m!}\varepsilon_k\right]^l\geqslant\left[\frac{l!\ (m-l)!}{m!}\varepsilon_l\right]^k\quad(1\leqslant k<l\leqslant m).\tag{4.1}$$

由(3.1),将

$$\varepsilon_j=\frac{(j!)^2 N_j}{N}$$

代入(4.1)整理即得(1.5).

类似地,根据 Newton 定理[6],有

$$\left[\frac{k!\ (m-k)!}{m!}\varepsilon_k\right]^2\geqslant\left[\frac{(k-1)!\ (m-k+1)!}{m!}\varepsilon_{k-1}\right]\cdot\left[\frac{(k+1)!\ (m-k-1)!}{m!}\varepsilon_{k+1}\right]\tag{4.2}$$

将(3.1)中的 ε_j 代入(4.2)即得(1.6). (4.1)与(4.2)等号成立的充要条件都是 m 个变数取值相同. 在我们的情况下,即是惯量等轴.

最后,我们认为,引理 2.1 和预备定理比所导出的不等式更为深刻和重要,这些不等式的证明不过是引理 2.1 多种应用之一端.

而且,如果不追究等号成立的几何意义,仅仅证明(1.5)和(1.6)就有简单得多的方法,只要能证明(3.2)所有的根都是正实

数，再用(4.1)和(4.2)即可.

应用(2.4)，可将方程(3.2)写成形式：

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & & \frac{\rho_{ij}^2}{2} & \\ 1 & & \lambda & & \\ \vdots & \frac{\rho_{ij}^2}{2} & & \ddots & \\ 1 & & & & \lambda \end{vmatrix}=0. \tag{4.3}$$

考虑方程：

$$F_\theta(\lambda)=\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ 1 & & \frac{\rho_{ij}^2}{2} & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} \theta & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}\right|=0. \tag{4.4}$$

在行列式(4.4)中，前一矩阵是实对称的，后一矩阵是恒正型(令 $\theta>0$)；根据二次型耦的一个熟知的定理得知(4.4)的根都是实的. 令 $\theta\to 0$ 取极限，即知(4.3)也只有实根. 又因其系数具有交错符号，故这些根都是正的. 这就简捷地证明了(1.5)，(1.6)等.

不过，由于缺少了等号成立的充分必要条件(几何意义)，这个证明不能算是对几何不等式的一个完整的证明.

参考文献

[1]Pedoe D., Thinking Geometrically, *Amer. Math. Monthly*, 77(1970), 711—721.

[2]Carlitz L., An Inequality Involving the Area of two Triangles, *Amer.*

Math. Monthly, 78(1971), 772.

[3]Blumenthal L. M., Theory and Applications of Distance Geometry. 2nd ed. New York. 1970.

[4]Graham, R. L., et al., Are there n+2 Points in E^n with Odd Integeral Distance, *Amer. Math. Monthly*, 81(1974), 21—25.

[5]Blumenthal L. M., and Gillam B. E., Distribution of Points in n-Space, *Amer. Math. Monthly*, 50 (1943). 181—185.

[6]Hardy G. H., Littlewood J. E., and Pólya, Inequalities, Cambridge, 2nd ed. 1952.

[7]Hodge W. V. and Pedoe D., Methods of Algebraic Geometry, Cambridge, Vol. I, 1953.

关于质点组的一类几何不等式*

张景中　杨　路

中国科学技术大学数学系(合肥,230026)

作者在[1]中用代数方法获得了一类几何不等式.本文通过新的途径导出了较[1]更为广泛的结果.所凭藉的工具仍然是代数的.

首先约定记号.设 $\mathscr{S}=\{A_i(m_i),i=1,2,\cdots,N\}$ 是 E^n 中的质点组,$m_i\geqslant 0$ 是点 A_i 所赋有的质量.取 $\mathscr{S}$ 的质心 O 为坐标原点.设 H 是过 O 的任一个 $n-1$ 维定向超平面,$\bar{e}_H$ 是 H 的单位法向量.又令 $\bar{a}_i=\overrightarrow{OA_i}$ 表示点 A_i 的坐标向量.按常例将

$$I_H=m_1(\bar{a}_1\cdot\bar{e}_H)^2+m_2(\bar{a}_2\cdot\bar{e}_H)^2+\cdots+m_N(\bar{a}_N\cdot\bar{e}_H)^2$$

叫做 $\mathscr{S}$ 关于 H 的转动惯量.令

$$\frac{\bar{e}_H}{\sqrt{I_H}}=\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则

$$\bar{e}_H=\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}=\frac{1}{\|\bar{x}\|}(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

设 $\bar{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,N$

---

* 本文发表在《中国科学技术大学学报》2(1981),收稿日期:1980年9月29日.

$$Q=\begin{pmatrix} \sqrt{m_1}a_{11} & \sqrt{m_2}a_{21} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{N1} \\ \sqrt{m_1}m_{12} & \sqrt{m_2}a_{22} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{N2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sqrt{m_1}a_{1n} & \sqrt{m_2}a_{2n} & \cdots & \sqrt{m_N}a_{Nn} \end{pmatrix}.$$

则由 I_H 之定义有

$$\bar{e}_H QQ^T \bar{e}_H{}^T = I_H = \frac{1}{\|\bar{x}\|^2},$$

这里$\bar{e}_H{}^T$,Q^T 表示$\bar{e}_H$,Q 之转置. 从而

$$\|x\|\bar{e}_H QQ^T(\|x\|\bar{e}_H)^T = 1.$$

即

$$\bar{x}QQ^T\bar{x}^T = 1.$$

由此可见，当 H 取遍所有过 O 之 $n-1$ 维超平面时，点$\bar{x}$之轨迹为一个二阶超曲面. 不妨假定$\{A_i\}$不在同一个超平面上，此时 QQ^T 是正定阵而该二阶超曲面为一椭球，记之为 $\mathscr{B}$. 如果 $\mathscr{U}$ 是另外一个椭球，它与 $\mathscr{B}$ 有相同的主轴而且它的各半轴是 $\mathscr{B}$ 的对应半轴的倒数，我们就将 $\mathscr{U}$ 叫做 $\mathscr{S}$ 的"密集椭球".

任取 $\mathscr{S}$ 中的 $k+1$ 个点 $A_{i_0}, A_{i_1}, \cdots, A_{i_k}$，将其所支撑的单形的 k 维体积记为 $V_{i_0 i_1\cdots i_k}$.

令

$$M_k = \sum\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0 i_1\cdots i_k} \quad (1\leqslant k\leqslant n),$$

$$M_0 = m_1+m_2+\cdots+m_N.$$

则下述命题显然是[1]中定理的推广.

定理 1 对 E^n 中质点组 $\mathscr{S}=\{A_i(m_i), i=1,2,\cdots,N\}(N>n)$ 的诸不变量$\{M_k\}$有不等式

$$\frac{M_k^l}{M_l^k}\geqslant\frac{[(n-l)!\,(l!)^3]^k}{[(n-k)!\,(k!)^3]^l}(n!\,M_0)^{l-k} \quad (1\leqslant k<l\leqslant n), \qquad (1)$$

$$M_k^2 \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{n-k+1}{n-k} \cdot M_{k-1}M_{k+1} \quad (1 \leqslant k \leqslant n), \qquad (2)$$

其等号当且仅当 $\mathscr{S}$ 的密集椭球为球时成立.

这里顺便指出，一个质点组的密集椭球为球的充分必要条件是:它关于质心的惯量椭球是一个球. 因此定理1中不等式等号成立的充分必要条件可改述为:"$\mathscr{S}$ 关于其质心的惯量椭球是一个球."

证明 令 $P=Q^TQ$,则 P 的非零特征值应与 QQ^T 一致,共有 n 个,都是正实数. 现考虑 P 的特征多项式:

$$\begin{aligned}
P(\lambda) &= \| Q^TQ-\lambda E \| \\
&= \| \sqrt{m_i}\sqrt{m_j}\bar{a}_i\bar{a}_j-\delta_{ij}\lambda \| \qquad \left(\delta_{ij}=\begin{cases}0(i\neq j)\\1(i=j)\end{cases}\right) \\
&= \frac{1}{M_0}\begin{vmatrix} M_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sqrt{m_1} & & & & & \\ \sqrt{m_2} & & & \sqrt{m_i}\sqrt{m_j}\bar{a}_i\bar{a}_j-\delta_{ij}\lambda & & \\ \vdots & & & & & \\ \sqrt{m_N} & & & & & \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

约定行列式的行列号由0算起. 将第 i 行乘以 $-\sqrt{m_i}$ 加到第1行, 援用 $\sum m_i\bar{a}_i=0$(质心性质)就得到:

$$P(\lambda)=\frac{\lambda}{M_0}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2} & \cdots & \sqrt{m_N} \\ \sqrt{m_1} & & & & \\ \sqrt{m_2} & & \sqrt{m_i}\sqrt{m_j}\bar{a}_i\bar{a}_j-\delta_{ij}\lambda & & \\ \vdots & & & & \\ \sqrt{m_N} & & & & \end{vmatrix}.$$

再将第0行(列)乘以 $-\frac{1}{2}\sqrt{m_i}\bar{a}_i^2$(或 $-\frac{1}{2}\sqrt{m_j}\bar{a}_j^2$)加到第 i 行(第 j 列),得到

$$P(\lambda)=\frac{\lambda}{M_0}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2} & \cdots & \sqrt{m_N} \\ \sqrt{m_1} & & & & \\ \sqrt{m_2} & & \multicolumn{3}{c}{-\frac{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}{2}(\overline{a}_i-\overline{a}_j)^2-\delta_{ij}\lambda} \\ \vdots & & & & \\ \sqrt{m_N} & & & & \end{vmatrix}.$$

若令 ρ_{ij}表示线段 A_iA_j 之长度,则有

$$P(\lambda)=\frac{\lambda}{M_0}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{m_1} & \sqrt{m_2} & \cdots & \sqrt{m_N} \\ \sqrt{m_1} & & & & \\ \sqrt{m_2} & & \multicolumn{3}{c}{-\frac{\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}}{2}\rho_{ij}^2-\delta_{ij}\lambda} \\ \vdots & & & & \\ \sqrt{m_N} & & & & \end{vmatrix}.$$

利用单形体积公式[2]

$$V^2(A_1,A_2,\cdots,A_{k+1})=\frac{(-1)^{k+1}}{2^k(k!)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & \rho_{ij}^2 & \\ 1 & & & \end{vmatrix},$$

可知

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{m_{i_0}} & \sqrt{m_{i_1}} & \cdots & \sqrt{m_{i_k}} \\ \sqrt{m_{i_0}} & & & & \\ \sqrt{m_{i_1}} & & \multicolumn{3}{c}{-\frac{1}{2}\sqrt{m_{i_\alpha}}\sqrt{m_{i_\beta}}\cdot\rho_{i_\alpha i_\beta}^2} \\ \vdots & & & & \\ \sqrt{m_{i_k}} & & & & \end{vmatrix}=-m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V^2_{i_0 i_1\cdots i_k}\cdot(k!)^2.$$

现将方程 $P(\lambda)=0$ 展开. 由于它只有 n 个非零根,故展开后形为

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k!)^2M_k\lambda^{n-k}\right)\cdot\lambda^{N-n}=0.$$

于是 $P(\lambda)=0$ 的 n 个非零根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足方程

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k!)^2M_k\lambda^{n-k}=0.$$

从而得到 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的各阶初等对称多项式 σ_k 的表达式

$$\sigma_k(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=(k!)^2\frac{M_k}{M_0}.$$

由 Maclaurin 定理[3]

$$\left[\frac{k!\ (n-k)!}{n!}\sigma_k\right]^l\geqslant\left[\frac{l!\ (n-l)!}{n!}\sigma_l\right]^k\quad(l>k),$$

得到所欲证之(1). 由 Newton 定理[4]

$$\left[\frac{k!\ (n-k)!}{n!}\sigma_k\right]^2\geqslant\left[\frac{(k-1)!\ (n-k+1)!}{n!}\sigma_{k-1}\right]\cdot\left[\frac{(k+1)!\ (n-k-1)!}{n!}\sigma_{k+1}\right].$$

得到所欲证之(2). 等号成立的充要条件是:$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$,即 $\mathscr{S}$ 的密集椭球是一个球. 定理 1 证毕.

容易看出,如果 $\mathscr{S}$ 不是有限质点组而是某个具有有限质量的区域,设质量分布函数为 $m(x)(x\in\mathscr{S})$,则可定义

$$M_k=\frac{1}{k!}\iint\cdots\int m(x_0)m(x_1)\cdots m(x_k)V^2(x_0,x_1,\cdots,x_k)dx_0dx_1\cdots dx_k,$$

$$M_0=\int m(x)dx.$$

通过极限过程可以证明,定理 1 中的 M_k,M_0 理解为这里的积分值时,两个不等式仍成立.

下面举例说明定理 1 的应用.

1970 年 D. Veljan 提出了如下猜测:在 E^n 中一个单形的体积 V 和它的诸棱长 $\rho_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n+1)$之间有不等式:

$$n!\ V\leqslant\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}.$$

且当该单形为正则时等号成立. 这个猜想在 1974 年被 Korchmáros 所证实. [4]

这导致我们考虑类似的一个问题：设 n 维单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 中每个顶点 A_i 所对的"侧面"(它是 $n-1$ 维单形)的$(n-1)$维体积是 v_i. 那应在原单形的体积 V 和这些侧面体积 v_i 之间是否成立着类似于 Veljan 猜想的不等式呢? 答案是肯定的. 事实上，援用定理 1 我们容易得到：

系 1 在 n 维单形的体积 V 及其诸侧面体积 v_i 之间有不等式

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{n+1}v_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}},\tag{3}$$

且当该单形为正则时等号成立.

证明 在不等式(1)中命 $l=n,k=n-1$，并令

$$m_1=v_1^2,m_2=v_2^2,\cdots,m_{n+1}=v_{n+1}^2,$$

就有

$$M_0=\sum_{i=1}^{n+1}v_i^2,$$

$$M_{n-1}=(n+1)\prod_{i=1}^{n+1}v_i^2,$$

$$M_n=\left(\prod_{i=1}^{n+1}v_i^2\right)\cdot V^2.$$

统统代入(1)式中，经过移项整理后有

$$\frac{(n+1)^n\cdot(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\prod_{i=1}^{n+1}v_i^2\geqslant V^{2(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n+1}v_i^2.$$

由算术—几何平均不等式

$$\sum_{i=1}^{n+1}v_i^2\geqslant(n+1)\prod_{i=1}^{n+1}v_i^{\frac{2}{n+1}}.$$

故有

$$\frac{(n+1)^{n-1}\cdot(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\prod_{i=1}^{n+1}v_i^{\frac{2n}{n+1}}\geqslant V^{2(n-1)}.$$

从而得到(3)式. 今取棱长为 1 的 n 维和 $n-1$ 维正则单形. 其体积公式是熟知的，将对应的 V 和 v_i 的值代入(3)，即知等号对正则单形确实成立. 系 1 证毕.

系 2 令 S_n 是 E^n 中所有 n 维单形组成之集. 一个单形 K 的体积及其各侧面体积分别用 $V(K)$和 $v_i(K)$来表示，则有

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{K\in S_n}\frac{1}{V(K)}\prod_{i=1}^{n+1}v_i(K)^{\frac{n}{n^2-1}}=e. \tag{4}$$

证明 由(3)式立即得到

$$\inf_{K\in S_n}\frac{1}{V(K)}\prod_{i=1}^{n+1}v_i(K)^{\frac{n}{n^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left[\frac{n^{3n-2}}{(n-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}.$$

运用Stirling公式显然有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left[\frac{n^{3n-2}}{(n-1)!^2}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}=e.$$

于是系 2 证毕.

从(3)还可以导出若干别的有趣的不等式. 首先将其中诸 v_i 的几何平均代之以算术平均：

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}v_i\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

令此单形的内切球半径为 r. 将关系

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}v_i=\frac{1}{r}V$$

代入前一式，移项整理后得到：

系 3 在 n 维单形的内切球半径 r 和体积 V 之间有不等式

$$r\leqslant\left[\frac{n!^2}{n^n(n+1)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{2n}}\cdot V^{\frac{1}{n}}. \tag{5}$$

且当该单形为正则时等号成立.

由(5)式取极限可以得到

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{K\in S_n} r(K)/V(K)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e}. \tag{6}$$

从而又有:

系 4 对于一切具有单位体积的单形而言,当空间的维数趋于无穷时,其内切球半径的上限是 $1/e$.

我们还可以考虑单形体积和它各条高线的长度 h_i 之间的关系. 由于

$$v_i=\frac{1}{h_i}nV,\quad i=1,2,\cdots,n+1,$$

将此式代入(3)中,经移项整理后得到:

系 5 在 n 维单形的体积 V 及其各条高线长度 h_i 之间有不等式

$$V\geqslant\frac{1}{n!}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n+1}h_i^{\frac{n}{n+1}}. \tag{7}$$

且当单形为正则时等号成立.

由以上的例子可以看到,系 1 是一个颇为有用的命题. 事实上从它也可以直接推出前面提到过的 Veljan-Korchmáros[4]不等式:

系 6 E^n 中一个单形的体积 V 和它的诸棱长 ρ_{ij} 之间有关系

$$n!\ V\leqslant\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}\rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}. \tag{8}$$

且当该单形为正则时等号成立.

证明 显然命题对 E^1 是成立的. 现在假定它对 E^{n-1} 已成立,往下证它对 E^n 为真.

沿用系 1 中的符号,将 n 维单形的各个 $n-1$ 维界面的体积记为 $v_r(r=1,2,\cdots,n+1)$. 既然(8)对 E^{n-1} 成立,那就有

$$(n-1)!\ v_r \leqslant \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n+1 \\ i\neq r, j\neq r}} \rho_{ij}^{\frac{2}{n}} \quad (r=1,2,\cdots,n+1).$$

乘起来得到

$$(n-1)!^{n+1}\prod_{r=1}^{n-1} v_r \leqslant \left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \rho_{ij}^{\frac{2n-1}{n}}.$$

另一方面由系 1(3)，有

$$V \leqslant \sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}} \left(\prod_{r=1}^{n+1} v_r\right)^{\frac{n}{n^2-1}}.$$

将前一式代入后一式得到

$$V \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1} \rho_{ij}^{\frac{n}{n+1}}.$$

此即(8)式. 当单形为正则时等号显然成立. 系 6 证毕.

提出如下的问题是自然的：当定理 1 中的质点组 $\mathscr{S}$ 的部分质点带有负质量时，我们能够说些什么？有关的不等式是否仍然成立？事实上我们可以建立下述的

定理 2 设 $\mathscr{S}=\{A_i(m_i), i=1,2,\cdots,N\}$ 是 E^n 中的质点组 $(N>n)$，各点 A_i 所赋有的质量 m_i 是可正可负的实数. 令 $M_0=m_1+m_2+\cdots+m_N\neq 0$，$M_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的意义如前所述. 则有

$$M_k^2 \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 \cdot \frac{n-k+1}{n-k} \cdot M_{k-1}M_{k+1}. \qquad (2)$$

而等号成立的充分必要条件仍然是：$\mathscr{S}$ 关于其质心的惯量椭球是一个球.

证明 我们基本上沿用定理 1 的证明，只须注意哪些地方需要修改. 首先遇到的问题是：由于质量是可正可负的，矩阵 Q 中出现一些纯虚数. 但是 QQ^T 仍然是实对称矩阵，所以它的特征值必然是实的. 虽然 $P=Q^TQ$ 可能是一个含有纯虚数的矩阵，但它的非零特征值应与 QQ^T 的一致，因而 P 的特征值也都是实的. 于是前面这部分论证，完全可以照搬. 只是到了最后一步，由于方程

$P(\lambda)=0$ 的 n 个非零根仅仅是实的而不一定是正的，所以不能援用 Maclaurin 定理而只能用 Newton 定理. 从而得到(2).

这里不准备花很多篇幅来说明定理 2 的种种应用了，只举一个简单的例子. 若令 $n=2, N=3$，三角形 $A_1A_2A_3$ 的三条对应边是 a,b,c，其面积为 Δ. 我们将证明：对于任意三个实数 λ,μ,ν 成立着不等式

$$(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2)^2\geqslant 16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\Delta^2. \tag{9}$$

证明 不失一般性，不妨假定 $\lambda\mu\nu>0$（否则考虑 $-\lambda,-\mu,-\nu$），从方程组

$$m_2m_3=\lambda,\quad m_3m_1=\mu,\quad m_1m_2=\nu$$

中可以解出一组实数 m_1,m_2,m_3. 另一方面，在(2)式中取 $k=1, n=2$，就有

$$M_1^2\geqslant 16M_0M_2.$$

将解得之 m_1,m_2,m_3 代入此式即得(9)式.

试将此例应用于特殊情况. 设另有一个三角形边长 a_1,b_1,c_1，面积为 Δ_1. 在(9)中令

$$\lambda=-a_1^2+b_1^2+c_1^2,\quad \mu=a_1^2-b_1^2+c_1^2,\quad \nu=a_1^2+b_1^2-c_1^2.$$

便又得到众所熟知的 Pedoe[5]不等式：

$$a^2(-a_1^2+b_1^2+c_1^2)+b^2(a_1^2-b_1^2+c_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16\Delta\Delta_1.$$

参 考 文 献

[1]杨路、张景中，数学学报，23(1980)，No. 5，740—749.

[2]Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, Oxford, 1953, 98—99.

[3]Hardy, G. H. 等，不等式，科学出版社，1965，53—57.

[4]Korchmáros, G., Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (8)56(1974), No. 6, 876—879.

[5]Pedoe, D., Proc. Camb. Phil. Soc. 38(1942), 397—398.

度量方程应用于 Sallee 猜想*

杨　路　张景中

中国科学技术大学数学系(合肥,230026)

§0　引　　言

在 n 维欧氏空间 E^n 中,一个有界凸体 K 的宽度是这样定义的:对于每个单位向量 u,将 K 的一对与 u 垂直的支撑超平面之间的距离记作 $\tau(K,u)$. 令

$$w(K)=\min_u \tau(K,u), \tag{0.1}$$

我们将 $w(K)$ 叫做 K 的宽度.

Sallee 在 1974 年提出猜想说[1],"内接于球的所有单形中,正则单形具有最大宽度";他当时并指出,甚至对三维情形也未能证明. 随后,这个猜想被 R. Alexander[2]所证实.

本文获得了比 Sallee-Alexander 定理更强的结果:"一切维数相同体积相等的单形中,正则单形具有最大宽度."从这个命题可以直接导出[2]中的结果,反之则不能.

更详细地讲,令 $V(\Delta_n)$ 记 n 维单形 Δ_n 的体积,我们证明了

$$w(\Delta_n)\leqslant C_n V(\Delta_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{0.2}$$

* 本文发表在《数学学报》4(1983),收稿日期:1981 年 5 月 18 日.

这里 C_n 是仅与维数 n 有关的绝对常数，其中等式当且仅当 Δ_n 为正则单形时成立.

我们的方法与[2]完全不同. 所用主要工具是作者曾在[3]中给出的两个命题.

§1　基本图形的度量方程

把 E^n 中的每个点或者每个定向超平面都叫做基本元素，由 k 个基本元素构成的集叫做 E^n 中的一个 k 元基本图形.

设 $\mathfrak{S}$ 是一个基本图形，$\mathfrak{S}=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$，这些 $e_i(1\leqslant i\leqslant N)$ 是基本元素——点或定向超平面. 在 $\mathfrak{S}$ 上定义一个二元实值函数

$$g:\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\to R,$$

使得

$$g(e_i,e_j)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\rho^2(e_i,e_j), & (\text{当 } e_i,e_j \text{ 都是点});\\ \cos\widehat{e_ie_j}, & (\text{当 } e_i,e_j \text{ 都是超平面});\\ d(e_i,e_j), & (\text{当 } e_i,e_j \text{ 中一为点，一为面}).\end{cases}$$

这里，$\rho(x,y)$表示两点 x,y 间的距离，$\widehat{xy}$表示两定向超平面 x,y 之间的夹角，而 $d(x,y)$则表示点 x(或 y)到定向超平面 y(或 x)的带号距离.

简单地记 $g_{ij}=g(e_i,e_j)$，我们有下述命题([3]中的引理 2.1)：

定理 1　设 $\mathfrak{S}=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$是 E^n 中的基本图形，令 $\delta_i=1-g_{ii}$　$(1\leqslant i\leqslant N)$，并令$[\mathfrak{S}]$表下列 $N+1$ 阶方阵：

$$[\mathfrak{S}]=\begin{bmatrix}0 & \delta_1 & \delta_2\cdots\delta_N\\ \delta_1 & & \\ \delta_2 & & \\ \vdots & & g_{ij} \\ \delta_N & & \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

记 $P[\mathfrak{S}]=\det[\mathfrak{S}]$，则当 $N>n+1$ 时，有

$$P[\mathfrak{S}]=0. \tag{1.2}$$

定理 1 的证明见[3].

形如(1.2)的方程,叫做基本图形的度量方程.这类方程在度量几何中扮演着极其重要的角色.有关的更一般的讨论可参看[4].

§2 几个引理

现在我们回到单形的宽度上来.

沿用§0 的记号,用 $\tau(\Delta_n,u)$ 表示 Δ_n 在方向 u 的宽度.我们有

引理 1 设 n 维单形 Δ_n 的顶点之集为 S,$S=\{p_1,p_2,\cdots,p_{n+1}\}$,则对 S 的每个非空的、不同于 S 的子集 A,必存在一个定向超平面 H,使得 $S\backslash A\subset H$,而且,A 中的各点到 H 有相等的带号距离,若以 v 记 H 的法向量,则这个带号距离的绝对值,就是 $\tau(\Delta_n,v)$.

证明 不妨设 $A=\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$,考虑向量组 $\mathscr{B}_A=\{p_2-p_1,p_3-p_1,\cdots,p_k-p_1;p_{k+2}-p_{k+1},p_{k+3}-p_{k+1},\cdots,p_{n+1}-p_{k+1}\}$,$\mathscr{B}_A$ 由 $n-1$ 个线性无关的向量组成,它生成 E^n 的一个 $n-1$维子空间 E_A,E_A 的正交补子空间是一维的.亦即,存在一个单位向量 v 与 $\mathscr{B}_A$ 中所有向量正交,而且这样的 v 不计正负号时是唯一的.作超平面

$$\pi_1: v\cdot(x-p_1)=0,$$

$$\pi_2: v\cdot(x-p_{k+1})=0,$$

则 $p_1,\cdots,p_k$ 在 π_1 上,$p_{k+1},\cdots,p_{n-1}$在 π_2 上,而且 $\pi_1/\!/\pi_2$,这就得到了所要的结论.

以下令 $I=\{1,2,\cdots,n+1\}$是开始的 $n+1$ 个正整数的集合.I 的一切 m 元子集所组成的集合记为 ϑ_m(用$|\sigma|$表示集 σ 的元素的个数):

$$\vartheta_m = \{\sigma \mid \sigma \subset I, |\sigma| = m\}. \tag{2.1}$$

这样，单形 Δ_n 的顶点集 $S=\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$ 的每个子集 S_σ 可以和 I 的一个子集 σ 对应：

$$S_\sigma = \{p_\alpha \mid \alpha \in \sigma, \sigma \subset I\}. \tag{2.2}$$

由引理 1 可知，对 S_σ，当 $1 \leqslant |\sigma| \leqslant n$ 时，存在一个定向超平面 H_σ，$S \backslash S_\sigma \subset H_\sigma$，使得 S_σ 中的一切点到 H_σ 的带号距离相等，这个带号距离仅与 H_σ 有关，故可记作 $d(H_\sigma)$. 若以 v_σ 记 H_σ 的单位法向量，则当 Δ_n 取定时，$\tau(\Delta_n, v_\sigma)$ 仅与 σ 有关，故可记作

$$\tau_\sigma = \tau(\Delta_n, v_\sigma) = |d(H_\sigma)|. \tag{2.3}$$

下面，我们给出 τ_σ 的计算公式.

引理 2 若 Δ_n 是 n 维单形，Δ_n 之顶点集 $S=\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$，则对 S 的任一非空真子集 S_σ，有等式

$$\tau_\sigma{}^2 = -\frac{1}{P[S]} \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & & \beta_1 \\ & [S] & & \vdots \\ & & & \beta_{n+1} \\ 0 & \beta_1 & \cdots \beta_{n+1} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

这里 $[S]$，$P[S]$ 见(1.1)及(1.2)，τ_σ 见(2.3)，而

$$\beta_i = \begin{cases} 1, & (i \in \sigma), \\ 0, & (i \notin \sigma). \end{cases}$$

证明 考虑 $n+2$ 元基本图形 $\mathfrak{S}_\sigma = \{p_1, \cdots, p_{n+1}, H_\sigma\}$. 如果令 $a_i = d(p_i, H_\sigma)$，则有

$$a_i = \begin{cases} d(H_\sigma), & (i \in \sigma), \\ 0, & (i \notin \sigma). \end{cases}$$

由定理 1，对 $\mathfrak{S}_\sigma$ 有

$$P[\mathfrak{S}_\sigma]=\begin{vmatrix} \begin{array}{c:c} \quad [S] \quad & \begin{matrix} 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{matrix} \\ \hdashline 0 \quad \alpha_1\cdots\alpha_{n+1} & 1 \end{array} \end{vmatrix}=0. \qquad (2.5)$$

把行列式的末行末列除以 $d(H_\sigma)$，并注意到有 $\tau_\sigma=|d(H_\sigma)|$，由(2.5)立得(2.4).

引理 3 对 n 维单形 Δ_n，有

$$w(\Delta_n)=\min_{\substack{\sigma\subset I\\ \varnothing\neq\sigma\neq I}}\{\tau_\sigma\}. \qquad (2.6)$$

这里 $w(\Delta_n)$ 表 Δ_n 之宽度，$I=\{1,2,\cdots,n+1\}$，而 τ_σ 如(2.3)所述.

证明 设 u 是 E^n 中任一个单位向量，π 是以 u 为法向量的 Δ_n 的支撑平面. 不妨设 Δ_n 的顶点都在 π 的正侧或在 π 上. 令 $d_i=d(p_i,\pi)$. 这里 $p_1,\cdots,p_{n+1}$ 仍记 Δ_n 的顶点，而 $d(p_i,\pi)$ 表 p_i 到 π 的带号距离，则显然有

$$\tau(\Delta_n,u)=\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{d_i\}. \qquad (2.7)$$

对 $n+2$ 元基本图形 $\mathfrak{S}_\pi=\{p_1,p_2,\cdots,P_{n+1},\pi\}$ 应用定理 1，得

$$P[\mathfrak{S}_\pi]=\begin{vmatrix} \begin{array}{c:c} \quad [S] \quad & \begin{matrix} 0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{matrix} \\ \hdashline 0 \quad d_1\cdots d_{n+1} & 1 \end{array} \end{vmatrix}=0. \qquad (2.8)$$

这里 $S=\{p_1,p_2,\cdots,p_{n+1}\}$，简记 $\tau(\Delta_n,u)=\tau_u$，用 τ_u 除(2.8)中行列式的末行末列，得

$$\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & [S] & & t_1 \\ & & & \vdots \\ & & & t_{n+1} \\ 0 & t_1 \cdots t_{n-1} & & \tau_u^{\;2} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.9}$$

由(2.7)以及诸 d_i 非负，可知 $0\leqslant t_i\leqslant 1$，而且诸 t_i 中至少有一个为0，至少有一个为1.

从(2.9)中解出(P_{ij}表 P 的对应于 g_{ij}的代数余子式)：

$$\tau_u^{\;2} = -\frac{1}{P[S]}\begin{vmatrix} & & & 0 \\ & [S] & & t_1 \\ & & & \vdots \\ & & & t_{n+1} \\ 0 & t_1 \cdots t_{n+1} & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{P[S]}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}(-P_{ij}[S])t_it_j. \tag{2.10}$$

我们指出，若某个 $t_j\neq 0$ 或 1，总可以把它换成 0 或 1 而使(2.10)的右端变得更大或不变. 事实上，考察(2.10)的和号中与 t_j 有关的那些项之和：

$$\left(-2\sum_{i\neq j}P_{ij}[S]t_it_j\right) - P_{jj}[S]t_j^2 = t_j(-P_{jj}[S]t_j + C),$$

当$(-P_{jj}[S]t_j+C)\leqslant 0$ 时，我们把 t_j 换成 0；反之，当$(-P_{jj}[S]t_j+C)>0$ 时，则把 t_j 换成 1. 由[3]中的公式(2.4)可知 $P[S]$和$P_{jj}[S]$都是负的，故这样的代换下(2.10)右端不减. 经过有限次代换后，诸 t_j 都变成 0 或 1，于是由引理 2 即得

$$\tau_u^{-2}\leqslant\tau_\sigma^{-2}.$$

这里 σ 是 $I=\{1,2,\cdots,n+1\}$的某个非空真子集. 引理 3 得证.

以下对 $m=1,2,\cdots,n$，记

$$D_m=\sum_{\sigma\in\vartheta_m}\tau_\sigma^{-2}. \tag{2.11}$$

这里 ϑ_m 由(2.1)给出. 我们来计算 D_m 之值.

引理 4 设 $V(F_i)$表 n 维单形 Δ_n 各侧面 F_i 的($n-1$ 维)体积, $V(\Delta_n)$表 Δ_n 的体积, $\binom{n}{k}$按通常表示组合数,则有

$$D_m=\binom{n-1}{m-1}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)}{n^2V^2(\Delta_n)}. \tag{2.12}$$

证明 按引理 2 的(2.4),我们有

$$\tau_\sigma^{-2}=(P[S])^{-1}\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\sigma}P_{ij}[S], \tag{2.13}$$

这里 $P_{ij}[S]$仍记 $P[S]$的对应于元素 g_{ij}的代数余子式($i,j=1,2,\cdots,n+1$). 于是有

$$\begin{aligned}D_m&=\sum_{\sigma\in\vartheta_m}\tau_\sigma^{-2}=(P[S])^{-1}\sum_{\sigma\in\vartheta_m}\sum_{i\in\sigma}\sum_{j\in\sigma}P_{ij}[S]\\&=(P[S])^{-1}\left(\binom{n}{m-1}\sum_{i=1}^{n+1}P_{ii}[S]\right.\\&\quad\left.+\binom{n-1}{m-2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{n+1}P_{ij}[S]\right)\\&=(P[S])^{-1}\left(\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n+1}P_{ii}[S]\right.\\&\quad\left.+\binom{n-1}{m-2}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}P_{ij}[S]\right).\end{aligned}$$

但是

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}P_{ij}[S]=-\begin{vmatrix}0&1&\cdots&1&0\\1&&&&1\\\vdots&&g_{ij}&&\vdots\\1&&&&1\\0&1&\cdots&1&0\end{vmatrix}=0,$$

故

$$D_m=\binom{n-1}{m-1}(P[S])^{-1}\sum_{i=1}^{n+1}P_n[S]. \qquad (2.14)$$

另一方面，由单形体积公式([3]中§2，式(2.4))

$$P[S]=-(n!)^2V^2(\Delta_n),$$

$$P_n[S]=-(n-1)!^2V^2(F_i),$$

代入(2.14)，即得所欲证之(2.12). 引理 4 证毕.

引理 5 按引理 4 中记号，有

$$\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)\geqslant n^3\left(\frac{n+1}{n!^2}\right)^{\frac{1}{n}}V(\Delta_n)^{2-\frac{2}{n}}. \qquad (2.15)$$

其中等号当且仅当 Δ_n 为正则单形时成立.

引理 5 不过是[3]中定理的一个特例，在[3]的(1.5)中取

$$m=l=k+1=N-1=n,$$

即得这里的不等式(2.15).

§3 联系着宽度与体积的不等式

本文的主要目的是导出下列的

定理 2 若 $w(\Delta_n)$和 $V(\Delta_n)$分别记 n 维单形的宽度和体积，则有

$$w(\Delta_n)\leqslant C_nV(\Delta_n)^{\frac{1}{n}}. \qquad (0.2)$$

其中

$$C_n=\frac{n!^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{n-1}{2n}}}{\left[\frac{n+1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)^{\frac{1}{2}}}, \qquad (3.1)$$

而且(0.2)中的等号当且仅当 Δ_n 是正则单形时取到.

证明 对一切 $\sigma\in\vartheta_m$ 计算 $\tau_\sigma{}^2$ 的算术平均$\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2})$，由引

理 4,得

$$\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{2})=\binom{n+1}{m}^{-1}D_m=\frac{\binom{n-1}{m-1}}{n^2\binom{n+1}{m}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)}{V^2(\Delta_n)}$$

$$=\frac{m(n+1-m)}{n^3(n+1)}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)}{V^2(\Delta_n)} \tag{3.2}$$

显然,当 $m=\left[\frac{n+1}{2}\right]$时,(3.2)的右端取到最大值,即

$$\max_{1\leqslant m\leqslant n}\{\underset{|\sigma|=m}{A.M.}(\tau_\sigma^{2})\}=\underset{|\sigma|=\left[\frac{n+1}{2}\right]}{A.M.}(\tau_\sigma^{2}). \tag{3.3}$$

另一方面,由引理 3 知

$$w(\Delta_n)=\min_{\substack{\sigma\subset I\\ \varnothing\neq\sigma\neq I}}\{\tau_\sigma\}=\min_{0<|\sigma|\leqslant n}\{\tau_\sigma\},$$

故

$$w^{-2}(\Delta_n)=\max_{0<|\sigma|\leqslant n}\{\tau_\sigma\}\geqslant\underset{|\sigma|=\left[\frac{n+1}{2}\right]}{A.M.}(\tau_\sigma^{-2}). \tag{3.4}$$

由(3.4)与(3.2),得

$$w^{-2}(\Delta_n)\geqslant\frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]\left(n+1-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)}{n^3(n+1)}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n+1}V^2(F_i)}{V^2(\Delta_n)}. \tag{3.5}$$

再应用引理 5,把(2.15)代入(3.5),化简之后即可得到(0.2),并可确定 C_n 之取值如(3.1). 在推导过程中,Δ_n 为正则单形是每一步骤中的"$\geqslant$"号取等号的充分条件,而且至少在使用(2.15)时是必要条件,故当且仅当 Δ_n 为正则单形时,(0.2)中的等式成立. 定理 2 证毕.

这也就证实了我们在引言中的断言:一切维数相同、体积相等的单形中,以正则单形具有最大宽度.

现在让我们顺便导出 Sallee-Alexander 的定理:

推论 内接于球的所有单形中，正则单形具有最大的宽度.

证明 只要指出，内接于一个球(不妨设其为单位球)的一切单形中，以正则单形体积最大就够了. 而这个事实是熟知的[5].

参考文献

[1]Guy R. K., Problems, Lecture Notes in Math. 490, "The Geometry of Metric and Linear Spaces", Springer-Verlag, 1975. 233--244.

[2]Alexander R., The width and diameter of a simplex, Geometriae Dedicata, 6:1(1977), 87—94.

[3]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，23:5(1980), 740—749.

[4]杨路、张景中，抽象距离空间的秩的概念，中国科学技术大学学报，10:4 (1980), 52—65.

[5]Tanner R. M., Some content maximizing properties of the regular simplex, Pac. J. Math., 52(1974), 611—616.

伪对称集与有关的几何不等式*

杨 路 张景中

中国科学院成都分院数理科学研究室(610041)

§0 引 言

N 个点在空间 E^n 中怎样分布算是"对称"的？例如在 E^3 中，当 $N\neq 4,6,8,12,20$ 时，N 个点不可能是某一正多面体的全部顶点，它们的分布能否具有某种对称性?这是在考虑某些几何不等式等号成立的条件时要产生的问题. 有一大类涉及某个点集 $\mathfrak{S}$ 的几何不等式[7]，其等号成立的条件都是：$\mathfrak{S}$ 关于其重心的惯量椭球是一个球. 作者把具有这种性质的点集叫做"惯量等轴"，这一术语反映了点集在某种意义上的对称性. 另外有许多几何不等式，它们的等号成立的条件是点集在不同意义或不同程度上的某种"对称性".

本文引进了 E^n-伪对称性的概念，这是比"惯量等轴"更强的对称条件，并建立了有关的几何不等式. 然后讨论了伪对称有限集的代数特征. 文中将离散结果应用于紧致曲面，获得了超球面区别于其它曲面的一个新的特征.

设 $\mathscr{F}$ 是 E^n 中的紧致曲面，F 表示 $\mathscr{F}$ 的面积. 令

---

* 本文发表在《数学学报》6(1986)，收稿日期：1984 年 4 月 22 日.

$$M_r(\mathscr{F}) = \frac{1}{F^2}\int_{\mathscr{F}}\int_{\mathscr{F}} |x - y|^r d\sigma(x)d\sigma(y)$$

表示 $\mathscr{F}$ 的“弦幂平均”，作者证明了不等式

$$M_4(\mathscr{F}) \geqslant \frac{n+1}{n} M_2^2(\mathscr{F}),$$

等号成立当且仅当 $\mathscr{F}$ 是一个超球面.

§1 伪对称集与离散的几何不等式

定义 1 设 $\mathfrak{S}$ 是 n 维欧氏空间中的一个点集. 我们说 $\mathfrak{S}$ 是 E^n-伪对称的，如果 $\mathfrak{S}$ 的凸包是 n 维的，而且

(i)$\mathfrak{S}$ 中所有的点都分布在 E^n 中的某一个球面 S^{n-1} 上；

(ii)球面 S^{n-1} 的中心 O 恰好是集 $\mathfrak{S}$ 的重心；

(iii)$\mathfrak{S}$ 关于 O 的惯量椭球是一个球.

据此定义，下列两个结论是显然的：

引理 1 一个 n 维正多面体的全部顶点之集是 E^n-伪对称的. 一个 $n-1$ 维球面上所有点之集是 E^n-伪对称的.

引理 2 如果 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{S}^*$ 都是 E^n-伪对称的，而且 $\mathfrak{S}$ 和 $\mathfrak{S}^*$ 分布在同一个球面上，则它们的并集 $\mathfrak{S}\cup\mathfrak{S}^*$ 也是 E^n-伪对称的.

下面将给出伪对称集的一个几何特征.

设 $\mathfrak{S}=\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$ 是 E^n 的有限子集，令 $|x_i-x_j|$ 表示两点 x_i,x_j 之间的欧氏距离，并令 M_r 表这些距离的 r 次幂的平均值

$$M_r(\mathfrak{S}) = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} |x_i - x_j|^r. \tag{1}$$

注意到 $|x_i-x_i|=0$，也可将(1)式写成

$$M_r(\mathfrak{S}) = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} |x_i - x_j|^r.$$

设 G 为点集 $\mathfrak{S}$ 的重心，令

$$a_i = |x_i - G| \quad (i=1,\cdots,N) \tag{2}$$

表示 x_i 到重心 G 的距离. 又令

$$L(\mathfrak{S})=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}(a_k^2-a_l^2)^2 \tag{3}$$

表示这些 $(a_k^2-a_l^2)^2$ 的平均值.

我们将建立下述的

定理 1 对于 E^n 中任何一个由 N 个点($N>n$)组成的有限点集 $\mathfrak{S}$ 有不等式

$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\cdot\frac{n+1}{n}M_2^2(\mathfrak{S})+L(\mathfrak{S}) \tag{4}$$

成立,这里等号成立的充分必要条件是:$\mathfrak{S}$ 关于其重心的惯量椭球是一个球.

这个定理的证明主要依赖于下面将要叙述的引理 3,它是一个更为普遍的已知结果的一个特款. 设以 N_1 表示 $\mathfrak{S}$ 中各点间两两距离的平方和,令 N_2 表示以 $\mathfrak{S}$ 中的点为顶点的所有三角形面积的平方和. 则有

引理 3(见[7]中的(1.5)式) 对于 E^n 中的任何一个 N 元素的有限点集 $\mathfrak{S}$ 有不等式

$$N_1^2\geqslant\frac{8n}{n-1}NN_2 \tag{5}$$

成立,而等号成立的充分必要条件是:$\mathfrak{S}$ 关于其重心的惯量椭球是一个球.

定理 1 的证明 令 $a_{ij}=|x_i-x_j|$,并令 $I(x_i)$表示 $\mathfrak{S}$ 关于点 x_i 的转动惯量,即

$$I(x_i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}^2,\ i=1,\cdots,N. \tag{6}$$

又令 $I(G)$表 $\mathfrak{S}$ 关于重心 G 的转动惯量. 根据熟知的事实有

$$I(x_i)=I(G)+N|x_i-G|^2. \tag{7}$$

于是

$$\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}(I(x_k)-I(x_l))^2$$
$$=N^2\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}(a_k^2-a_l^2)^2=\frac{N^3(N-1)}{2}L(\mathfrak{S}).\tag{8}$$
又
$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^2\right)^2=\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^2\right)\right)^2$$
$$=\frac{N}{4}\left(\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^2\right)^2\right)-\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}\left(\sum_{j=1}^N a_{kj}^2-\sum_{j=1}^N a_{lj}^2\right)^2$$
$$=\frac{N}{4}\left(\sum_{i=1}^N\left(\sum_{j=1}^N a_{ij}^2\right)^2\right)-\frac{1}{4}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}(I(x_k)-I(x_l))^2.\tag{9}$$
现在令 Δ_{ijk} 表示以 x_i,x_j,x_k 为顶点的三角形的面积. 由熟知的面积公式我们有
$$16\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\Delta_{ijk}^2=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}$$
$$(2a_{ij}^2a_{jk}^2+2a_{jk}^2a_{ki}^2+2a_{ki}^2a_{ij}^2-a_{ij}^4-a_{jk}^4-a_{ki}^4)$$
$$=2\sum_{i=1}^N\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2\right)-(N-2)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^4.$$
即
$$2\sum_{i=1}^N\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant N}a_{ik}^2a_{il}^2\right)=(N-2)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^4+16N_2.\tag{10}$$
将(8)和(10)代入(9),整理后得到
$$N_1^2=\frac{N^2}{4}\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant N}a_{ij}^4+4NN_2-\frac{N^3(N-1)}{8}L(\mathfrak{S}).\tag{11}$$
将(5)代入(11),整理后得到
$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\ \frac{n+1}{n}M_2^2(\mathfrak{S})+L(\mathfrak{S}).$$
此即我们要证明的(4). 至于等号成立的条件,由于推导过程中不等号只出现于(5),故(5)等号成立的条件也就是(4)等号成立的条件. 这条件是:$\mathfrak{S}$ 关于其重心的惯量椭球是一个球.

定理 1a　对于 E^n 中任一个由 N 个点($N>n$)组成的有限点集 $\mathfrak{S}$ 有不等式

$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\ \frac{n+1}{n}M_2^2(\mathfrak{S}) \tag{12}$$

成立,等号成立当且仅当 $\mathfrak{S}$ 是 E^n-伪对称的.

证明　(12)成立的充分必要条件是(4)的等号成立,而且 $L(\mathfrak{S})=0$. 显然 $L(\mathfrak{S})=0$ 等价于条件(i)和(ii),而(4)的等号成立等价于条件(iii).

这个定理建立了各点相互距离的四次幂平均同二次幂平均之间的一个不等式关系,而等号成立的条件恰好是前面所定义的伪对称性.

§2　应用于紧致曲面

设 $\mathscr{F}$ 是 E^n 中的紧致曲面,令 F 表示 $\mathscr{F}$ 的面积. 取 $\mathscr{F}$ 的重心为坐标原点. 我们采用下面的量 $L(\mathscr{F})$ 来刻画 $\mathscr{F}$ 与超球面之间的偏离

$$L(\mathscr{F})=\frac{1}{F^2}\int_{\mathscr{F}}\int_{\mathscr{F}}(|x|^2-|y|^2)^2d\sigma(x)d\sigma(y). \tag{13}$$

又令 $M_r(\mathscr{F})$表 $\mathscr{F}$ 的 r 阶弦幂平均如引言所述. 则由定理 1 取极限立即得到

定理 2　对 E^n 中任一个紧致曲面 $\mathscr{F}$,有

$$M_4(\mathscr{F})\geqslant\frac{n+1}{n}M_2^2(\mathscr{F})+L(\mathscr{F}) \tag{14}$$

成立.

作为这个定理的一个推论我们可以得到,使一个超球面区别于其它曲面的一个新的特征.

定理 2a　对 E^n 中任意一个紧致曲面 $\mathscr{F}$,有

$$M_4(\mathscr{F})\geqslant\frac{n+1}{n}M_2^2(\mathscr{F}),\tag{15}$$

等号当且仅当 $\mathscr{F}$ 是一个超球面时成立.

应该注意到，这里涉及的弦幂积分是二重曲面积分，它不同于经典积分几何中的弦幂积分 I_r 或 J_r. 在那里 J_r 是凸体上的二重积分，而

$$I_r=\frac{1}{2}r(r-1)J_{r-n-1}.$$

关于凸体的弦幂积分 I_r(或 J_r)之间的不等式一直是有兴趣的课题[4-6]. 另一方面，目前我们还不知道怎样把本文的不等式推广到一般的 M_r 上去.

§3 伪对称有限点集的代数特征

首先考虑满足定义 1 的部分条件——条件(i)和(ii)的点集. 这类点集引起兴趣[1,2]，因为它能使某些泛函取到极值. $\mathfrak{S}$ 及有关记号如 §1 所述. 一般将 N 阶方阵(a_{ij}^2)叫做 $\mathfrak{S}$ 的“平方距离阵”，其重要程度可能不亚于 Cayley Menger 阵[3].

定义 2 有限点集 $\mathfrak{S}$ 的平方距离阵的特征多项式

$$f(\lambda)=\det(a_{ij}^2-\lambda E)$$

叫做 $\mathfrak{S}$ 的特征多项式. 又将镶边行列式

$$g(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -\lambda & a_{12}^2 & \cdots & a_{1N}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & -\lambda & \cdots & \\ 1 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{N1}^2 & & & -\lambda \end{vmatrix}\tag{16}$$

叫做 $\mathfrak{S}$ 的次特征多项式.

引理 4 设 $\mathfrak{S}$ 是满足条件(i)和(ii)的 N 个点的集，则其特征多项式与次特征多项式有关系为

$$Nf(\lambda)=(\lambda-c)g(\lambda). \tag{17}$$

这里 $c=2NR^2$，R 是 $\mathfrak{S}$ 所在球面的半径.

这引理的推导从略. 由之可直接推出

系 1 对于满足条件(i)和(ii)的 N 个点的集 $\mathfrak{S}$，它的次特征多项式 $g(\lambda)$的根都是特征多项式 $f(\lambda)$的根，此外 $f(\lambda)$还有一根为 $2NR^2$.

为弄清伪对称集的代数特征还需要下述的

引理 5 如果有限点集 $\mathfrak{S}$ 的凸包是 n 维的，而且 $\mathfrak{S}$ 关于其重心的惯量椭球是一个球，则 $\mathfrak{S}$ 的次特征多项式只有 n 个非零根，这 n 个非零根是相重的(n 重根).

这个结果是已知的，请参看[8]中的推论 4.1. 下面将建立本节的主要定理.

定理 3 设 $\mathfrak{S}$ 是 N 个点的集($N>n$)，则 $\mathfrak{S}$ 为 E^n-伪对称集的充分必要条件是：$\mathfrak{S}$ 的特征多项式与次特征多项式之间的关系为：

$$Nf(\lambda)=(\lambda-c)g(\lambda),$$

而且 $g(\lambda)$只有 n 个非零根，这 n 个非零根相重.

证明 由引理 4 和引理 5 知，这条件的必要性是显然的. 下面证条件的充分性.

设 $g(\lambda)$的 n 个非零根为 n 重根 λ_0. 按 $g(\lambda)$的定义将多项式展开，注意到 $g(\lambda)$的其它根都是零，由根与系数的关系容易算出

$$n\lambda_0=-\frac{2}{N}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^2. \tag{18}$$

其次考虑 $f(\lambda)$的根. 由假设 $f(\lambda)$除拥有 $g(\lambda)$的全部根外还另有一根 c. 注意到平方距离阵的迹必然是零，可知 $f(\lambda)$所有根之和为零. 于是有

$$c=-n\lambda_0. \tag{19}$$

将多项式 $f(\lambda)$ 按定义展开，注意到它的 n 个根是 λ_0，一个根是 $-n\lambda_0$，而其余的根是零. 由根与系数的关系容易算出

$$\frac{n(n+1)}{2}\lambda_0^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^4. \tag{20}$$

将(18)与(20)比较就得

$$M_4(\mathfrak{S})=\frac{N-1}{N}\frac{n+1}{n}\cdot M_2^2(\mathfrak{S}).$$

由定理 1 知，$\mathfrak{S}$ 是 E^n-伪对称的. 定理 3 证毕.

参考文献

[1]Alexander, R. and Stolarsky, K. B., Extremal Problems of distance geometry related to energy integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 193 (1974), 1－31.

[2]Björk, G., Distributions of positive mass which maximize a certain generalized energy integral, Ark. Mat., 3(1956), 255－269.

[3]Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, New York, 1970.

[4]Santaló, L. M., Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley Pub., 1976.

[5]吴大任，On the relations between the integrals for the power of chords of a convex set，第一次全国微分几何学术讨论会，1983.

[6]任德麟，The unified inequalities governing the integrals for the power of chords，第二次国际双微讨论会 (DD2)，1981.

[7]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，23：5(1980)，740—749.

[8]张景中、杨路，有限点集在伪欧空间的等长嵌入，数学学报，24:4(1981)，481—487.

关于伪对称集的一个注记*

左铨如　毛其吉

扬州师范学院数学系(江苏,225002)

为了研究某些不等式的需要,最近文献[1]引进了伪对称集的概念.

定义　设 $\mathfrak{S}$ 是 n 维欧氏空间 E^n 中的一个点集,我们说 $\mathfrak{S}$ 是 E^n 伪对称的,如果 $\mathfrak{S}$ 的凸包是 n 维的,而且

(i)$\mathfrak{S}$ 中所有的点都分布在 E^n 中的某个球面 S^{n-1}上;

(ii)球面 S^{n-1}的中心 O 恰好是点集 $\mathfrak{S}$ 的重心;

(iii)$\mathfrak{S}$ 关于 O 的惯量椭球[2]是一个球.

显然,在 E^2 中总存在着含有任意 N 个点($N>2$)的伪对称集.值得考虑的是空间 E^n 中 N 个点适当分布是否总能成为 E^n 伪对称的? 本文证明了如下的定理.

定理 1　在 E^n 中,当 n 为偶数时,$n+2$ 个点必能成 E^n 伪对称的;当 n 为奇数时,$n+2$ 个点不可能成为 E^n 伪对称的.

定理 2　E^{2k}中 $2k+2$ 个点之集 $\mathfrak{S}=\{P_1,\cdots,P_{2k+2}\}$是 E^{2k}伪对称的充要条件:$\mathfrak{S}$ 是 E^{2k+1}中某个正单纯形顶点之集 $\mathfrak{S}'=\{Q_1,\cdots,Q_{2k+2}\}$在 E^{2k}上的正投影,投影方向就是点集$\{Q_1,\cdots,Q_{k+1}\}$的重心与$\{Q_{k+2},\cdots,Q_{2k+2}\}$的重心连线的方向.

---

* 本文发表在《科学通报》19(1987),收稿日期:1987 年 4 月 7 日.

由定理 1 可知，文献[1]中给出了很有价值的不等式：

$$M_4(\mathfrak{S})\geqslant\frac{N-1}{N}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot M_2^2(\mathfrak{S}),$$

当 $N=n+2$ 时，n 为偶数时等号能够成立；而 n 为奇数时，等号不可能成立，即这时恒有

$$M_4(\mathfrak{S})>\frac{(N-1)^2}{N(N-2)}M_2^2(\mathfrak{S})\quad(N=n+2\text{ 为奇数}).$$

以上式中 $M_r(\mathfrak{S})$ 表示 E^n 中 N 个点 P_i 之间的距离的 r 次幂的平均值，即

$$M_r(\mathfrak{S})=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}|P_i-P_j|^r.$$

为了证明上述结论，需要引用文献[3]中的定理 4.2.

E^n 中点集 $\mathfrak{S}=\{P_1,P_2,\cdots,P_N;N>n\}$ 的惯量椭球是一个球的充要条件是：$\mathfrak{S}$ 是 E^n 的扩空间 E^{N-1} 中某个正单纯形顶点之集 $\mathfrak{S}^*=\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_N\}$ 在 E^n 上的正投影.

根据这个定理，我们先在 E^{N-1} 中给出一个正单纯形顶点之集 $\mathfrak{S}^*$，将它向 E^{N-2} 作正投影，再判断这 N 个射影点 P_i 能不能在以重心为中心的某个球面 S^{N-3} 上，从而知道它们能不能构成伪对称集.

容易验证，E^{N-1} 中这样的 N 个点：

$$Q_i=(0,\cdots,0,\overset{i}{1},0,\cdots,0)\quad(i=1,2,\cdots,N-1),$$

$$Q_N=(a,a,\cdots,a),\quad a=\frac{-1}{\sqrt{N}+1}.$$

它们之间的距离都等于 $\sqrt{2}$，因而是 E^{N-1} 中的一个正单纯形的顶点. 点集 $\mathfrak{S}^*=\{q_1,q_2,\cdots,q_N\}$ 的重心 $\mathfrak{S}^*$ 的坐标为

$$G^*=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}q_i=(g,g,\cdots,g),\quad g=\frac{1+a}{N}.$$

将 $\mathfrak{S}^*$ 沿某方向 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_{N-1})$ 向过 G^* 的超平面 π 作正投

影，$N-2$ 维超平面 π（即 E^{N-2}空间）的方程为

$$u(P-G^*)=0.$$

Q_i 在 π 上的正射影是

$$P_i=Q_i+ut_i,$$

其中 $t_i=\dfrac{u(G^*-Q_i)}{|u|^2}, i=1,\cdots,N.$

点集 $\mathfrak{S}=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}$的重心，

$$G=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}P_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Q_i+ut_i)=G^*,$$

$$\begin{aligned}|P_i-G|^2&=|Q_i-G^*+ut_i|^2\\&=|Q_i-G^*|^2+u^2t_i^2+2t_iu(Q_i-G^*)\\&=\frac{N-1}{N}-\left[\frac{u(G^*-Q_i)}{|u|}\right]^2.\end{aligned}$$

因此 N 个点 P_i 在以 G 为中心的球面 S^{N-3}上的充要条件是

$$[u(G^*-Q_1)]^2=\cdots=[u(G^*-Q_{N-1})]^2=[u(G^*-Q_N)]^2.$$

i）若 $u(G^*-Q_i)=u(G^*-Q_j), 1\leqslant i<j\leqslant N-1$，则有

$$u_i=u_j;$$

ii）若 $u(G^*-Q_i)=-u(G^*-Q_j)$，则有

$$u_i+u_j=2uG^*=2g\sum_{k=1}^{N-1}u_k. \tag{1}$$

故 u 的分量 u_i 至多能取两个值.

a）若 u 的分量全相同，不妨设 $u=(1,1,\cdots,1)$，代入下式

$$[u(G^*-Q_{N-1})]^2=[u(G^*-Q_N)]^2,$$

得

$$[(N-1)g-1]^2=(g-a)^2(N-1)^2. \tag{2}$$

将 $a=\dfrac{-1}{\sqrt{N}+1}, g=\dfrac{1+a}{N}=\dfrac{1}{N+\sqrt{N}}$代入上式得

$$\left(\frac{N-1}{N+\sqrt{N}}-1\right)^2=\left(\frac{1+\sqrt{N}}{N+\sqrt{N}}\right)^2(N-1)^2,$$

$$1=(N-1)^2,$$

这与 $N>2$ 矛盾.

b)若 u 的 l 个分量取 1, 其它 $N-1-l$ 个分量取 $b(l=1,2,\cdots,N-2)$, 由(1)式得

$$1+b=2g[l+b(N-1-l)], \tag{3}$$

这时(2)式成为

$$[lg+(N-1-l)gb-b]^2=(g-a)^2[l+(N-1-l)b]^2,$$

将(3)式代入得

$$(1-b)^2=\left(1-\frac{a}{g}\right)^2(1+b)^2,$$

故

$$\frac{1-b}{1+b}=\frac{1+\sqrt{N}}{\pm 1},$$

$$b=1-2\,\frac{1+\sqrt{N}}{1+\sqrt{N}\pm 1}, \tag{4}$$

又由(3)式,得

$$b=\frac{2gl-1}{1-2g(N-1-l)}.$$

与(4)式比较,应有

$$\frac{2l-N-\sqrt{N}}{2l+2-N+\sqrt{N}}=\frac{\pm 1-1-\sqrt{N}}{1+\sqrt{N}\pm 1},$$

解之,得

$$l=\frac{N-1\pm 1}{2}.$$

当 N 为奇数时,与 l 为整数矛盾;而当 N 为偶数时,

$$l=\frac{N}{2}\left(\text{或}\frac{N}{2}-1\right),b=\frac{-\sqrt{N}}{2+\sqrt{N}}\left(\text{或}\frac{2+\sqrt{N}}{-\sqrt{N}}\right),$$

投影方向

$$u=\Bigg(\underbrace{1,\cdots,1}_{\frac{N}{2}\text{个}},\underbrace{\frac{-\sqrt{N}}{2+\sqrt{N}},\cdots,\frac{-\sqrt{N}}{2+\sqrt{N}}}_{\frac{N}{2}-1\text{ 个}}\Bigg)$$

$$\left(\text{或 } u' = \left\{ \overbrace{1, \cdots, 1}^{\frac{N}{2}-1\text{个}}, \overbrace{\frac{2+\sqrt{N}}{-\sqrt{N}}, \cdots, \frac{2+\sqrt{N}}{-\sqrt{N}}}^{\frac{N}{2}\text{个}} \right\}\right).$$

由于点 $Q_1, \cdots, Q_{\frac{N}{2}}$ 的重心 G_1 的坐标是 $\frac{2}{N}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{\frac{N}{2}\text{个}}, 0, \cdots, 0)$，点 $Q_{\frac{N}{2}+1}, \cdots, Q_N$ 的重心 G_2 的坐标是 $\frac{2}{N}(\underbrace{a, \cdots, a}_{\frac{N}{2}\text{个}}, 1+a, \cdots, 1+a)$，$G_1G_2$ 的方向平行于 $(1-a, \cdots, 1-a, -1-a, \cdots, -1-a) \parallel u$. 又 $Q_N, Q_1, \cdots, Q_{\frac{N}{2}-1}$ 的重心与 $Q_{\frac{N}{2}}, \cdots, Q_{N-1}$ 的重心连线平行于 u'. 因此不仅定理 1 获证，而且给出了如定理 2 所述的构造一类伪对称集的具体方法.

参考文献

[1]杨路、张景中，伪对称集与有关的几何不等式，数学学报，29(1986)，6：802—806.

[2]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，23(1980)，5：740—749.

[3]张景中、杨路，有限点集在伪欧空间的等长嵌入，数学学报，24(1981)，4：481—487.

球面型空间中伪对称集的两个几何特征与有关的一个几何不等式*

杨世国

安徽教育学院数学系(合肥,230061)

1. 主要结论

关于度量空间中点集在各种不同意义下的"对称性"的研究，是十分重要和有趣的. 最近，杨路、张景中在文[1]中提出了"伪对称集"的重要概念，它反映了欧氏点集在某种意义上的对称性，有许多关于点集的重要几何不等式，它们中等号成立的条件是点集具有这种对称性. 因此，全面、深刻地认识伪对称集的各种几何特征是十分重要和有意义的，本文给出了球面型空间中伪对称集的两个几何特征与有关的一个几何不等式.

关于 n 维欧氏空间 E^n 中伪对称集，[1]中给出如下定义.

定义 设 σ 为 E^n 中的一点集，称 σ 是 E^n-伪对称集，若 σ 的凸包是 n 维的，且

(i)σ 中所有的点都分布在 E^n 中的某一球面 S^{n-1} 上；

(ii)球面 S^{n-1} 的中心 O 恰为点集 σ 的重心；

(iii)σ 关于 O 的惯量椭球是一个球.

---

* 本文发表在《数学杂志》4(1992)，收稿日期：1989 年 10 月 6 日. 收入本书时略有删节.

由此定义出发，[1]中给出了 E^n-伪对称集的一个几何特征。根据 E^n-伪对称集的定义，可见 E^n 中的伪对称集必是球面点集，因此，E^n 中伪对称集的研究，可直接对球面型空间中点集进行研究。本文中约定 $S_{n-1,r}$ 表示曲率半径为 r 的 $n-1$ 维球面型空间，作者研究了球面型空间 $S_{n-1,r}$ 中伪对称集，从而获得了 $S_{n-1,r}$ 中伪对称集的两个几何特征定理和有关的一个几何不等式定理，即下面的定理 1、定理 2 和定理 3.

定理 1 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}$ $(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则 σ 是伪对称集的充分必要条件是

$$\frac{N^4}{16}=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N\\1\leqslant l<k\leqslant N\\(i,j)\neq(l,k)}}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{lk}}{2r}+\left[\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{jk}}{2r}\cdot\sin^2\frac{\varphi_{ki}}{2r}\right)^{2/3}. \quad (1)$$

定理 2 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}$ $(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}$ $(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则 σ 是伪对称集的充分必要条件是下面两式同时成立

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{N^2}{4},\\ \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{(n+1)N^2}{8n}.\end{cases} \quad (2)$$

关于球面型空间 $S_{n-1,r}$ 中有限点集 σ 相互之间的球面距离，我们得到下面一个与伪对称集有关的一个几何不等式.

定理 3 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}$ $(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}$ $(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则有不等式

$$\frac{N^4}{16} \geqslant \sum_{\substack{1 \leqslant l < k \leqslant N \\ 1 \leqslant i < j \leqslant N \\ (i,j) \neq (l,k)}} \sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2r} \sin^2 \frac{\varphi_{lk}}{2r}$$

$$+ \left[\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant N} \sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2r} \sin^2 \frac{\varphi_{jk}}{2r} \sin^2 \frac{\varphi_{ki}}{2r} \right)^{2/3}. \tag{3}$$

等号成立当且仅当 σ 是伪对称集.

2. 基本引理

为了证明§1中的几个定理,在本节中我们提出并证明下述几个引理. 为了行文方便起见,本文中记

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{12}}{2r} & \sin^2 \frac{\varphi_{13}}{2r} & \cdots & \sin^2 \frac{\varphi_{1N}}{2r} \\ \sin^2 \frac{\varphi_{21}}{2r} & 0 & \sin^2 \frac{\varphi_{23}}{2r} & \cdots & \sin^2 \frac{\varphi_{2N}}{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sin^2 \frac{\varphi_{N1}}{2r} & \sin^2 \frac{\varphi_{N2}}{2r} & \sin^2 \frac{\varphi_{N3}}{2r} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$f(\lambda) = \det(4r^2 A - \lambda E), \tag{5}$$

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & 4r^2 A - \lambda E & \\ 1 & & & \end{vmatrix}. \tag{6}$$

即 $f(\lambda)$ 与 $g(\lambda)$ 是 N 阶方阵 $4r^2 A$ 的特征多项式与次特征多项式.

引理 1 设 $\sigma = \{A_1, A_2, \cdots, A_N\} \subset S_{n-1,r}$,点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_i A_j} = \varphi_{ij} (1 \leqslant i < j \leqslant N)$,则有不等式

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} \sin^2 \frac{\varphi_{ij}}{2r} \leqslant \frac{N^2}{4}. \tag{7}$$

等号当且仅当 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 与 σ 之重心重合时成立.

注意到 $a_{ij}^2=4r^2\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}$，由[1]中的引理 4 与[2]中的推论 4.1，有下面两个引理：

引理 2 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}$，点 A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$，若 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 与 σ 之重心重合，则

$$Nf(\lambda)=(\lambda-2Nr^2)g(\lambda). \tag{9}$$

引理 3 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}$，$\sigma$ 的凸包是 n 维的，A_i 与 A_j 间的球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则 σ 关于其重心的惯量椭球为一个球的充分必要条件是 $g(\lambda)$ 只有 n 个非零根，且这 n 个非零根是相重的.

引理 4 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}(N>n)$，点 A_i 与 A_j 间球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}\quad(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则 $f(\lambda)$ 只有一个正根，n 个负根，其余根皆为零.

证明 设 $S_{n-1,r}$ 之中心为 O，$\overrightarrow{OA_i}=\vec{a}_i\quad(i=1,2,\cdots,N)$，则

$$4r^2\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\overline{A_iA_j}^2=2r^2-2\,\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j.$$

记

$$D=(2\,\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j)_{i,j=1}^N,$$

J 是元素皆为 1 的 N 阶方阵.于是有

$$4r^2A+D=2r^2J.$$

由[3]中结论可知，

$$\operatorname{rank}(4r^2A)=n+1,$$

故 $f(\lambda)$ 只有 $n+1$ 个非零根；显见

$$p(\lambda)=\det(2r^2J-\lambda E)$$

只有一个非零根 $\lambda_1(p)=2Nr^2$；D 是半正定矩阵.

设 $f(\lambda)$、$h(\lambda)=\det(D-\lambda E)$、$p(\lambda)$ 的诸根从小到大排列依次

为：

$$\lambda_1(f),\lambda_2(f),\cdots,\lambda_N(f);$$
$$\lambda_1(h),\lambda_2(h),\cdots,\lambda_N(h);$$
$$\lambda_1(p),\lambda_2(p),\cdots,\lambda_N(p).$$

由 Weyl 定理的推论[4]，有

$$\lambda_i(f)\leqslant\lambda_i(p)\quad(i=1,2,\cdots,N).$$

所以 $$\lambda_1(f)\leqslant\lambda_1(p)=2Nr^2,$$
$$\lambda(f_i)\leqslant\lambda(p_i)=0\quad(i=2,3,\cdots,N).$$

由于 $Tr(Ar'A)=0$，从而有 $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(f)=0$，即

$$\lambda_1(f)=-\sum_{i=2}^{N}\lambda_i(f).$$

故 $f(\lambda)$ 只有一个正根 $\lambda_1(f)$，只有 n 个负根 $\lambda_{N-n+1}(f),\lambda_{N-n+2}(f),\cdots,\lambda_N(f)$，其余根皆为零，且

$$\lambda_1(f)=-\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(f)=\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_i(f)|. \tag{10}$$

引理 5 设 $\sigma=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S_{n-1,r}(N>n)$，$A_i$ 与 A_j 间球面距离为 $\widehat{A_iA_j}=\varphi_{ij}\quad(1\leqslant i<j\leqslant N)$，则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}\geqslant\left[\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\right]^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{jk}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{ki}}{2r}\right)^{2/3}, \tag{11}$$

等号成立当且仅当 $f(\lambda)$ 的负根皆相等.

证明 用 σ_k 与 S_k 分别表示 $f(\lambda)$ 诸根的第 k 个初等对称多项式与 k 次幂之和，由 Veita 定理：

$$16r^4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}=-\sigma_2, \tag{12}$$

$$64r^6\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k\leqslant N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{jk}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{ki}}{2r}=\frac{1}{2}\sigma_3. \tag{13}$$

由引理 4 知 $f(\lambda)$ 只有一个正根 $\lambda_1(f)$，只有 n 个负根 $\lambda_{N-i}(f)$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$，由熟知的不等式与(10)式，

$$S_2=\lambda_1^2(f)+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{N-i}^2(f)\geqslant\lambda_1^2(f)+\frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_{N-i}(f)|\Big)^2$$

$$=\lambda_1^2(f)+\frac{1}{n}\lambda_1^2(f)=\frac{n+1}{n}\lambda_1^2(f). \tag{14}$$

又由(10)式可知

$$S_3=\lambda_1^3(f)\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{N-i}^3(f)=\lambda_1^3-\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_{N-i}(f)|^3>0.$$

而
$$\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_{N-i}(f)|^3\geqslant\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=0}^{n-1}|\lambda_{N-i}(f)|\Big)^3$$

$$=\frac{1}{n^2}\Big|\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{N-i}(f)\Big|^3=\frac{1}{n^2}\lambda_1^3(f).$$

所以

$$0<S_3\leqslant\frac{n^2-1}{n^2}\lambda_1^3(f). \tag{15}$$

由于

$$\sigma_1=S_1=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(f)=0, \tag{16}$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}(S_1^2-S_2)=-\frac{1}{2}S_2, \tag{17}$$

$$\sigma_3=-\frac{1}{6}[(S_2-S_1)^2S_1-2(S_3-S_2S_1)]=\frac{1}{3}S_3 \tag{18}$$

由(14)、(15)两式，有

$$\frac{n+1}{n}S_2\geqslant\lambda_1^2(f)\geqslant\Big(\frac{n^2}{n^2-1}\Big)^{2/3}S_3^{2/3}.$$

再由(17)、(18)两式，得

$$-\sigma_2\geqslant\Big[\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\Big]^{\frac{1}{2}}\sigma_3^{2/3}.$$

将(12)、(13)两式代入上式便得不等式(11)，且易知(11)式中等号

成立的充分必要条件是(14)、(15)两式中等号同时成立，而(14)、(15)中等号成立的充分必要条件皆为$\lambda_{N-n+1}(f)=\lambda_{N-n+2}(f)=\cdots=\lambda_N(f)$，即$f(\lambda)$的负根皆相等.

3. 定理之证明

有了上节中的几个引理，本节完成定理1、2、3之证明. 本节中的记号意义如前.

定理1、3之证明：

不等式(7)两边平方，得

$$
\begin{aligned}
&\frac{N^4}{16}-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}\sin^2\frac{\varphi_{ik}}{2r}\\
&\qquad\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

(19)式中等号成立当且仅当$S_{n-1,r}$之中心O与σ之重心重合.

再由不等式(11)与不等式(19)便得不等式(3). 下面说明(3)中等号成立的条件.

当σ为伪对称集时，(19)中等号成立，由引理2知等式(9)成立，由引理3知$g(\lambda)$只有n个非零根，且这n个非零根是相重的，再由(9)式知$f(\lambda)$的所有负根皆相等，由引理5知(11)式中等号成立，从而(3)式中等号成立.

反之，若(3)中等号成立，则(19)式与(11)式中等号同时成立，而(19)式中等号成立的充分必要条件是$S_{n-1,r}$之中心O为σ之重心，由引理2知此时等式(9)成立. 由引理5知$f(\lambda)$的所有负根皆相等，而引理4告诉我们$f(\lambda)$只有一个正根，n个负根，其余根皆为零，利用等式(9)便知$g(\lambda)$只有n个非零根，且这n个非零根是相重的，由引理3知σ关于其重心的惯量椭球是个球，故σ是伪对称集. 定理1、3证毕.

定理 2 的证明：由引理 1 知 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 为 σ 之重心等价于

$$\sum_{1\le i<j\le N}\sin^2\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{N^2}{4},$$

故只须证明：

当 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 为 σ 之重心时，则 σ 关于 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 的惯量椭球是个球的充分必要条件是

$$\sum_{1\le i<j\le N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{(n+1)N^2}{8n} \tag{20}$$

证明 由引理 4 与引理 2 可知，此时 $f(\lambda)$ 只有一个正根 $\lambda_1(f)=2Nr^2$，n 个负根 $\lambda_{N-n+1}(f),\lambda_{N-n+2}(f),\cdots,\lambda_N(f)$，这 n 个负根恰为 $g(\lambda)$ 的 n 个非零根，且由 $Tr(4r^2A)=0$，有

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{N-i}(f)=\lambda_1(f)=2Nr^2. \tag{21}$$

当 σ 关于 $S_{n-1,r}$ 之中心 O 的惯量椭球是个球时，由引理 3，$g(\lambda)$ 只有 n 个非零根，且这 n 个非零根是相重的，即

$$\lambda_{N-n+1}(f)=\lambda_{N-n+2}(f)=\cdots=\lambda_N(f)=-\frac{2Nr^2}{n}.$$

由(12)、(17)两式，有

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}&=\frac{\sigma_2}{16r^4}\\&=\frac{S_2}{32r^4}=\frac{1}{32r^4}\left[\lambda_1^2(f)+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_{N-i}^2(f)\right]\\&=\frac{(n+1)N^2}{8n}.\end{aligned}$$

反之，若(20)式成立，往证 $g(\lambda)$ 仅有 n 个非零根 $\lambda_{N-i}(f)$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ 必皆相等，否则，不等式(14)中取严格不等号，即

$$S_2>\frac{n+1}{n}\lambda_1^2(f)=\frac{4(n+1)N^2r^4}{n}.$$

由(12)、(17)两式，有

$$\sum_{1\leq i<j\leq N}\sin^4\frac{\varphi_{ij}}{2r}=\frac{S_2}{32r^4}>\frac{(n+1)N^2}{8n}.$$

这与(20)相矛盾,故 $g(\lambda)$ 仅有的 n 个非零根皆相等,由引理 3 知 σ 关于 $S_{n-1,\sigma}$ 之中心 O 的惯量椭球是一个球. 定理 2 证毕.

参考文献

[1]杨路、张景中,伪对称集与有关的几何不等式,数学学报,1986,29(6).

[2]张景中、杨路,有限点集在伪欧空间的等长嵌入,数学学报,1981,24(4)

[3]杨路、张景中,抽象距离空间的秩的概念,中国科学技术大学学报,1980 年 4 期.

[4]李乔,矩阵论八讲,上海科学技术出版社. 1988.

共球诸点相互距离之间的一个不等式*

周加农

西南民族学院数学系(成都,610041)

距离几何作为几何学的一个分支是由 K. Menger 在本世纪20年代末所开创的,L. M. Blumenthal 集二四十年代距离几何之大成写成了专著《*Theory and Applications of Distance Geometry*》,此专著就是距离几何之经典. 近年来,距离几何在统计学和分子生物学等方面得到了应用,并引起了一些统计学家及生物化学家们的注意.

一个点集的平方距离矩阵在距离几何研究中的重要性不亚于所谓的 Cayley-Menger 矩阵[1]. 本文对 n 维欧氏空间中的有限点集的平方距离矩阵进行了讨论并得到了共球诸点相互距离之间的一个几何不等式. 设 n 维欧氏空间中有限点集 $\mathfrak{S}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}$,用 $d(p_i,p_j)$表示点 p_i 与 p_j 之间的欧氏距离,令 $a_{ij}=d(p_i,p_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$称矩阵 $A=(a_{ij}^2)$为点集 $\mathfrak{S}$ 的平方距离矩阵[2]. 对于 $\mathfrak{S}$ 的每三个点 p_i,p_j,p_k,可以构成一个三角形 $p_ip_jp_k$ $(1\leqslant i<j<k\leqslant N)$;$\mathfrak{S}$ 的所有这样的三角形的边长的四次方之和与三边乘积的平方之和有什么关系呢? 本文对此问题进行了探讨并得到了有关的结果,这就是

* 本文发表在《科学通报》14(1988),收稿日期:1987 年 8 月 10 日.

定理 设 $\mathfrak{S}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)$，超球面 $S^{n-1}(R)$ 的球心为坐标原点，$a_{ij}=d(p_i,p_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$，那么下列不等式成立：

$$\left(\sum_{1\le i<j\le N}a_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\le i<j<k\le N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2, \tag{1}$$

且等号成立的充分必要条件是矩阵 $A=(a_{ij}^2)$ 的负特征值相等.

为证明定理，我们需要下列

引理 设 $\mathfrak{S}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)$，球心 O 为坐标原点，则 $\mathfrak{S}$ 的平方距离矩阵 $A=(a_{ij}^2)$ 的特征值中只有一个是正的，且等于 A 的其余负特征值之和反号.

证明 因为

$$a_{ij}^2=|p_i-p_j|^2=2R^2-2p_ip_j.$$

若令 J 为元素全为 1 的矩阵，$F=(2p_ip_j)$，则 $F=2R^2J-A$.

下面的事实是显然的：

(i) 矩阵 $2R^2J$ 只有一个非零正特征值 $2NR^2$；

(ii) 矩阵 F 是一正半定矩阵；

(iii) 矩阵 $A=(a_{ij}^2)$ 的秩为 $n+1$[3].

若把矩阵 A、F、$2R^2J$ 的特征值都按降序排列并应用 Weyl 定理[4]，可得

$$\lambda_i(A)+\lambda_N(R)\leqslant\lambda_i(2R^2J)(i=1,2,\cdots,N).$$

由于矩阵 F 正半定且 $N>n$，故 $\lambda_N(F)=0$. 那么有

$$\lambda_1(A)\leqslant\lambda_1(2R^2J)=2NR^2,$$

$$\lambda_j(A)\leqslant\lambda_j(2R^2J)=0\quad(j=2,3,\cdots,N).$$

再由 $T_r(A)=0$，知

$$\lambda_1(A)=-\sum_{j=2}^{N}\lambda_j(A).$$

因此 A 的特征值中除了 $\lambda_1(A)$ 为正的外，其余均小于等于零，而 A 的非零特征值只有 $n+1$ 个，于是 A 有 n 个负的特征值.

定理的证明：因

$$\mathfrak{S}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n,\ \mathrm{rank}(A)=n+1,$$

由引理可知 A 的非零特征值中只有一个为正且等于其余负特征值之和反号，故不妨设 A 的非零特征值为

$$\lambda_0,-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n\quad(\lambda_i>0,i=1,2,\cdots,n).$$

写出 A 的特征多项式为

$$A(\lambda)=|a_{ij}^2-\delta_{ij}\lambda|.$$

若以 σ_k 和 s_k 分别记 A 的特征值的第 k 个初等对称多项式和 k 次幂之和，由 Veita 定理知

$$\sum_{1\leq i<j\leq N}a_{ij}^4=-\sigma_2,$$

$$\sum_{1\leq i<j<k\leq N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2=\frac{1}{2}\sigma_3,$$

因

$$\sigma_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2),$$

$$\sigma_3=-\frac{1}{6}[(s_2-s_1)^2s_1-2(s_3-s_2s_1)],$$

注意到 $\sigma_1=s_1=T_r(A)=0$，故

$$\sigma_2=-\frac{1}{2}s_2,$$

$$\sigma_3=\frac{1}{3}s_3.$$

下面直接估计 s_2 和 s_3：

$$\begin{aligned}s_2&=\lambda_0^2+(-\lambda_1)^2+(-\lambda_2)^2+\cdots+(-\lambda_n)^2\\&=\lambda_0^2+\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2.\end{aligned}$$

由熟知的不等式

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2+\lambda_2^2+\cdots+\lambda_n^2\\&\geq\frac{1}{n}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)^2,\end{aligned}\tag{2}$$

得

$$s^2 \geqslant \frac{n+1}{n}\lambda_0^2. \tag{3}$$

另一方面，$s_3 = \lambda_0^3 + (-\lambda_1)^3 + (-\lambda_2)^3 + \cdots + (-\lambda_n)^3$

$= \lambda_0^3 - (\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \cdots + \lambda_n^3)$，

由
$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \cdots + \lambda_n^3 \geqslant \frac{1}{n^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^3, \tag{4}$$

得
$$s_3 \leqslant \frac{n^2-1}{n^2}\lambda_0^3. \tag{5}$$

由(3)、(5)二式可知

$$\frac{-\sigma_2^3}{\sigma_3^2} = \frac{\frac{1}{8}s_2^3}{\frac{1}{9}s_3^2} \geqslant \frac{9n(n+1)}{8(n-1)^2},$$

化简即得(1)式.

再讨论等式成立的条件：(1)中等式成立的充分必要条件是(3)、(5)中的等式成立，亦即(2)、(4)中的等号成立，其充分必要条件为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

由定理可以得到几个推论：

推论 1 设

$$\mathfrak{S} = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\} \subset S^{n-1}(R) \subset E^n (N > n),$$

若 $\mathfrak{S}$ 的重心与球心 O 重合，$a_{ij} = d(p_i, p_j)(i, j = 1, 2, \cdots, N)$，则有不等式(1)成立，且(1)式中等号成立的充分必要条件是 $\mathfrak{S}$ 为一伪对称集.

文献[2]中首次给出了伪对称集的概念，其中定理 3 已给出了一个点集为伪对称集的充分必要条件. 事实上在推论 1 的条件下，推论 1 的结论与文献[2]中的定理 3 是等价的.

推论 1 的证明略.

推论 1 实际上给出了(1)式中等式成立的例子，这就是说(1)式中的等式是能够达到的.

推论 2 设 $\mathfrak{S} = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$ 为球面空间 $S_{n,r}$ 中的点集

$(N>n+1)$，$\widehat{p_ip_j}$记点 p_i 与 p_j 在 $S_{n,r}$中的球面距离，则有下列不等式成立：

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\sin^4\frac{\widehat{p_ip_j}}{2r}\right)^3\geqslant\frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}$$
$$\cdot\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}\sin^2\frac{\widehat{p_ip_j}}{2r}\sin^2\frac{\widehat{p_jp_k}}{2r}\sin^2\frac{\widehat{p_kp_i}}{2r}\right)^2,\qquad(6)$$

且等式成立的充分必要条件是矩阵 $A=\left(\sin^2\frac{\widehat{p_ip_j}}{2r}\right)$的负特征值相等.

证明 因 $S_{n,r}\subset E^{n+1}$，p_i，p_j 在 E^{n+1}中的欧氏距离为

$$a_{ij}=2r\sin\frac{\widehat{p_ip_j}}{2r},(i,j=1,2,\cdots,N),$$

此时 $\mathfrak{S}$ 可视为 E^{n+1}中球面 $S_{n,r}$中点集，应用定理并注意维数的变化即得(6)式.

推论 3 设

$\mathfrak{S}=\{p_1,p_2,\cdots,p_N\}\subset E^n(N>n+1)$，

$\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{S}))=n$，$a_{ij}=d(p_i,p_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$，

那么下列不等式成立：

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}a_{ij}^4\right)^3>\frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2.\qquad(7)$$

证明 因定理中不等式(1)与球面 $S^{n-1}(R)$的半径无关，因此当球面的半径趋于无穷大时(1)式中不等式仍成立. 现把 E^n 视为半径为无穷大之球面 $S^n(\infty)\subset E^{n+1}$，再应用定理并注意到维数的变化即得(7)式. 因

$\mathfrak{S}\subset E^n$，$\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{S}))=n$，$\mathrm{rank}(A)=n+1$，

矩阵 $A=(a_{ij}^2)$不可能有相等的 $n+1$ 个负特征值，故不等式(7)中等号取不到，(7)式为严格不等式.

·

参考文献

[1]Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, New York, 1970.

[2]杨路、张景中.伪对称集与有关的几何不等式,数学学报,29(1986),6:802--806.

[3]杨路、张景中,抽象距离空间的秩的概念.中国科学技术大学学报,10(1980),1:1—14.

[4]倪国熙,常用的矩阵理论和方法,上海科学技术出版社,1981,4.

共超球质点系的一个结果及其应用*

杨世国

安徽教育学院数学系(合肥,230061)

本文中约定 $S_{m,r}$ 表示半径为 r 的 m 维超球面,E^n 表示 n 维欧氏空间,$a_{ij}=d(P_i,P_j)$ 表示 E^n 中点 P_i 与 P_j 间的欧氏距离,$\widehat{P_iP_j}$ 表示球面型空间 $S_{n,r}$ 中两点 P_i 与 P_j 间的球面距离.对 E^n 中的点集 $\sigma=\{P_i;i=1,2,\cdots,N\}$,将每点 P_i 赋予质量 $m_i>0(i=1,2,\cdots,N)$.关于 E^n 中共超球面的质点系 $\sigma(m)=\{P_i(m_i);i=1,2,\cdots,N\}$,本文的主要结果是:

定理 1 设质点系 $\sigma(m)=\{P_i(m_i);i=1,2,\cdots,N\}$ 共超球面 $S_{n-1,R}\subset E^n(N>n)$,$S_{n-1,R}$ 之中心为坐标原点,$a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$,则成立不等式

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} m_im_ja_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} m_im_jm_ka_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2. \quad (1)$$

等号成立当且仅当矩阵 $A=(\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}a_{ij}^2)$ 的所有负特征值皆相等.

我们先介绍定理 1 的几个重要应用,然后再完成它的证明.

现考虑球面型空间 $S_{n,r}$ 中的质点系,应用定理 1 可得:

* 本文发表在《数学杂志》1(1994).收稿日期:1991 年 4 月 9 日.收入本书时略有删节.

推论 1 设 $\sigma(m)=\{P_i(m_i);i=1,2,\cdots,N\}$ 为球面型空间 $S_{n,r}$ $(N>n+1)$ 中的质点系，$\widehat{P_iP_j}$ 为点 P_i 与 P_j 在 $S_{n,r}$ 中的球面距离，则成立不等式

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} m_i m_j \sin^4\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\right)^3 \geqslant \frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}$$
$$\cdot\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} m_i m_j m_k \sin^2\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\cdot\sin^2\frac{\widehat{P_jP_k}}{2r}\sin^2\frac{\widehat{P_iP_k}}{2r}\right)^2. \quad (2)$$

等号成立当且仅当矩阵 $\left(\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}\sin^2\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\right)$ 的所有负特征值皆相等.

证明 因为 $S_{n,r}\subset E^{n+1}$，P_i 与 P_j 在 E^{n+1} 中的欧氏距离为

$$a_{ij}=2r\sin\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r} \quad (i,j=1,2,\cdots,N).$$

此时 $\sigma(m)$ 可视为 E^{n+1} 中共超球面 $S_{n,r}$ 的质点系，应用定理 1 并注意到维数的变化，便得不等式(2)，等号成立的条件是显然的.

再考虑 E^n 中未必共超球面的质点系，应用定理 1 可得：

推论 2 设 $\sigma(m)=\{P_i(m_i);i=1,2,\cdots,N\}$ 为 $E^n(N>n+1)$ 中的质点系，$a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$，且点集 $\{P_i;i=1,2,\cdots,N\}$ 的凸包为 n 维的，则

$$\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} m_i m_j a_{ij}^4\right)^3 \geqslant \frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}$$
$$\cdot\left(\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} m_i m_j m_k a_{ij}^2 a_{jk}^2 a_{ki}^2\right)^2. \quad (3)$$

证明 因为不等式(1)与球面 $S_{n-1,R}$ 的半径无关，因此当球面半径趋于无穷大时，(1)式中不等式仍成立. 现将 E^n 视为半径为无穷大的球面 $S_{n,\infty}\subset E^{n+1}$，由定理 1 并注意到维数变化便得到不等式(3). 最后我们将说明(3)中等号不可能取到.

特别地，若在定理 1、推论 1 与推论 2 中令 $m_1=m_2=\cdots=m_N$，便得到关于 E^n 中有限点集的如下几个结论：

推论 3 设 $\sigma=\{P_i;i=1,2,\cdots,N\}\subset S_{n-1,R}\subset E^n(N>n)$，$S_{n-1,R}$之中心为坐标原点，$a_{ij}=d(P_i,P_j)$，则成立不等式

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq N}a_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\leq i<j<k\leq N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2. \tag{4}$$

等号成立当且仅当矩阵(a_{ij}^2)的负特征值皆相等.

推论 4 设 $\sigma=\{P_i;i=1,2,\cdots,N\}$为球面型空间 $S_{n,r}$中的点集$(N>n+1)$，$\widehat{P_iP_j}$为点 P_i 与 P_j 间的球面距离，则成立不等式

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq N}\sin^4\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\right)^3\geqslant\frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}\left(\sum_{1\leq i<j<k\leq N}\sin^2\frac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\cdot\sin^2\frac{\widehat{P_jP_k}}{2r}\cdot\sin^2\frac{\widehat{P_kP_i}}{2r}\right)^2. \tag{5}$$

等号成立当且仅当矩阵$\left(\sin^2\dfrac{\widehat{P_iP_j}}{2r}\right)$的负特征值皆相等.

推论 5 设 $\sigma=\{P_i;i=1,2,\cdots,N\}\subset E^n(N>n+1)$，$\dim(\text{con}(\sigma))=n$，$a_{ij}=d_i(P_i,P_j)$，则成立不等式

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq N}a_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9(n+1)(n+2)}{2n^2}\left(\sum_{1\leq i<j<k\leq N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2. \tag{6}$$

推论 3、4、5 为最近[1]中的结果.

以下约定 $\overline{p}_i$ 表示 E^n 中点 P_i 的坐标向量. 为了证明定理 1，我们先证明如下一个引理：

引理 1 设质点系 $\sigma(m)=\{P_i(m_i);i=1,2,\cdots,N\}$共超球面 $S_{n-1,R}\subset E^n(N>n)$，$a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$，则矩阵 $A=\left(\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}a_{ij}^2\right)$的 N 个特征值中只有 $n+1$ 个非零特征值，其中一个为正的，且等于其余负特征值之和的反号.

证明 由于 A 的特征多项式为

$$A(\lambda)=|\sqrt{m_i}\sqrt{m_j}a_{ij}^2-\delta_{ij}\lambda|$$

$$-m_1m_2\cdots m_N\begin{vmatrix} -\frac{1}{m_1}\lambda & a_{12}^2 & a_{13}^2 & \cdots & a_{1N}^2 \\ a_{21}^2 & -\frac{1}{m_2}\lambda & a_{23}^2 & \cdots & a_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1}^2 & a_{N2}^2 & a_{N3}^2 & \cdots & -\frac{1}{m_N}\lambda \end{vmatrix} \tag{7}$$

由此可见,矩阵 A 的非零特征值的个数与矩阵 (a_{ij}^2) 的非零特征值的个数相等,并且矩阵 A 与矩阵 (a_{ij}^2) 的正、负特征值的个数也分别相等. 而 (a_{ij}^2) 只有 $n+1$ 个非零特征值,其中一个为正的,n 个为负的[1]. 故矩阵 A 只有 $n+1$ 个非零特征值,其中一个为正的,n 个为负的. 由 $\mathrm{Tr}(A)=0$ 可知,A 的一个正特征值等于 n 个负特征值之和的反号. 引理 1 证毕.

由于篇幅的限制,定理的证明在此略去.

参考文献

[1]周加农,共球诸点相互距离之间的一个不等式,科学通报,11(1988),1045--1047.

共球有限点集的一类几何不等式*

苏化明

合肥工业大学数学力学系(230009)

§1 引 言

设 $\sigma=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}$ 为 n 维欧氏空间 $E^n(N>n)$ 中的有限点集，令 $a_{ij}=d(P_i,P_j)$，其中 $d(P_i,P_j)$ 表示点 P_i 与 P_j 之间的距离 $(i,j=1,2,\cdots,N)$，则称 $A=(a_{ij}^2)$ 为点集 σ 的平方距离矩阵[1]. 关于共球的有限点集 σ，周加农证明了如下的

定理 1.1[2] 设 $\sigma=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n)$，超球面 $S^{n-1}(R)$ 的球心为坐标原点，$a_{ij}=d(P_i,P_j)(i,j=1,2,\cdots,N)$，则有不等式

$$\left(\sum_{1\leq i<j\leq N}a_{ij}^4\right)^3\geqslant\frac{9n(n+1)}{2(n-1)^2}\left(\sum_{1\leq i<j<k\leq N}a_{ij}^2a_{jk}^2a_{ki}^2\right)^2, \qquad (1.1)$$

其中等号当且仅当矩阵 $A=(a_{ij}^2)$ 的负特征值相等时成立.

本文将利用代数方法建立比(1.1)更广泛的一类几何不等式，作为其推论，可以导出 E^n 中的单形外接球半径与其子单形外接球半径之间的若干关系式，而这一内容恰恰是距离几何中讨论较少

* 本文发表在《数学年刊》15A:1(1994)；收稿日期：1991 年 9 月 24 日(初稿)，1993 年 3 月 21 日(修改稿).

的部分.

设 $S^{n-1}(R)$ 为 n 维欧氏空间 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的 $n-1$ 维超球面，$\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}$ 为包含于 $S^{n-1}(R)$ 的有限点集，m_i 为与 A_i 对应的正数($i=1,2,\cdots,N$). 任取 $\mathscr{A}$ 的 $k+1$ 个点 $A_{i_0},A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$，将其所支撑的单形的 k 维体积记为 $V_{i_0i_1\cdots i_k}$，该单形的外接球半径记为 $R_{i_0i_1\cdots i_k}$. 令

$$M_k=\sum\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\cdots\sum(m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}V_{i_0i_1\cdots i_k}R_{i_0i_1\cdots i_k})^2\quad(1\leqslant k\leqslant n),$$

则有如下的

定理 1.2 设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n(N>n\geqslant 2)$，则 $\mathscr{A}$ 的诸不变量 $\{M_k\}$ 有不等式

$$\frac{M_k^{l-1}}{M_l^{k-1}}\geqslant\frac{\left[k\binom{n+1}{k+1}\right]^{l+1}(l!)^{2(k+1)}}{\left[l\binom{n+1}{l+1}\right]^{k+1}(k!)^{2(l+1)}}\quad(1\leqslant k<l\leqslant n),\qquad(1.2)$$

其中等号当且仅当矩阵 $B=(m_im_ja_{ij}^2)$ 的负特征值相等时成立.

§2 引理及定理的证明

引理 2.1 设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n$ $(N>n\geqslant 2)$，$S^{n-1}(R)$ 的球心 O 为坐标原点，则矩阵 $B=(m_im_ja_{ij}^2)$ 的特征值只有一个是正的，且等于 B 的其余 n 个负特征值之和反号.

利用[2]中引理的证法即可证明本引理，过程从略.

引理 2.2[4] 设 $\mathscr{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}\}$ 为 E^n 中的 n 维单形，其体积为 V，外接球半径为 R，则有

$$V^2R^2=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n!)^2}D_0(B_1,B_2,\cdots,B_{n+1}),\qquad(2.1)$$

其中 $D_0(B_1,B_2,\cdots,B_{n+1})=\left|\boxed{b_{ij}^2}\right|$，而 $b_{ij}=d(B_i,B_j)$，$(i,j=1,2,$

$\cdots,n+1)$.

定理 1.2 的证明 不妨设 $S^{n-1}(R)$ 的球心 O 为笛卡儿坐标原点.

由[4]知平方距离矩阵 (a_{ij}^2) 的秩为 $n+1$，故 $\mathrm{rank}B=n+1$，从而矩阵 B 的非零特征值只有 $n+1$ 个. 由引理 2.1，可设 B 的非零特征值为

$$\lambda_0,-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_n \quad (\lambda_i>0,i=0,1,\cdots,n).$$

B 的特征方程为

$$\det(B-\lambda I)=0.$$

利用矩阵特征方程的根与矩阵各阶主子式的关系可得

$$(-1)^k\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_0\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k+1}\leqslant n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{k+1}}\right)=\sum_{r=1}^{\binom{N}{k+1}}D_r^{(k+1)},$$

其中 $D_r^{(k+1)}$ 为 B 的 $k+1$ 阶主子式

$$\left[r=1,2,\cdots,\binom{N}{k+1}\right].$$

由引理 2.2，所以

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\lambda_0\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_k}-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{k+1}\leqslant n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{k+1}}=2^{k+1}(k!)^2M_k. \tag{2.2}$$

同理有

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_l\leqslant n}\lambda_0\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_l}-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{l+1}\leqslant n}\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{l+1}}=2^{l+1}(l!)^2M_l. \tag{2.3}$$

若以 P,Q 分别表示(2.2)、(2.3)两式的左端，将 $\lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 分别代入(2.2)、(2.3)两式左端，消去带负号的项，并注意到 $1\leqslant k<l\leqslant n$，利用[5]中的定理 5，可以得到

$$\left[\frac{P}{n\binom{n}{k}-\binom{n}{k+1}}\right]^{l+1} \geqslant \left[\frac{Q}{n\binom{n}{l}-\binom{n}{l+1}}\right]^{k+1} \quad (1 \leqslant k < l \leqslant n). \tag{2.4}$$

$\left[这里约定\binom{n}{n+1}=0\right]$

由(2.2)、(2.3)、(2.4)即得(1.2). 再由[5]中定理 5 的证明过程知(2.4)式中等号亦即(1.2)式中等号当且仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n$，也就是矩阵 B 的 n 个负特征值相等时成立.

在(1.2)中取 $k=1, l=2, m_1=m_2=\cdots=m_N$，并由熟知的三角形面积与边长的关系，$a_{ij}a_{jk}a_{ki}=4\Delta_{ijk}R_{ijk}$，即得(1.1)，故定理 1.1 为定理 1.2 之特款.

§3　几个推论

由定理 1.2 可得以下推论.

推论 3.1　设 $\mathscr{S}=\{A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}\}$ 为 $E^n(n\geqslant 2)$ 中的单形，其体积与外接球半径分别为 V, R. 若 $\mathscr{S}$ 的顶点 A_i 所对侧面的面积与外接球半径分别为 $V_i, R_i (i=1,2,\cdots,n+1)$，则有

$$\prod_{i=1}^{n-1}(V_iR_i) \geqslant \frac{n^{\frac{n}{2}}(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)!}(VR)^n, \tag{3.1}$$

其中等号当且仅当所有的 $V_iV_jR_iR_ja_{ij}^2 (i, j=1,2,\cdots,n+1, i\neq j)$ 相等时成立.

证明　在不等式(1.2)中，令 $N=n+1, k=n-1, l=n$，$m_i=V_iR_i (i=1,2,\cdots,n+1)$；则有

$$M_{n-1}=(n+1)\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_iR_i\right)^2, M_n=\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_iR_i\right)^2 V^2R^2,$$

代入(1.2)并整理即得(3.1).

以下讨论不等式(3.1)等号成立的充要条件.

若(3.1)式等号成立,则由(1.2)式等号成立条件及引理 2.1,可设矩阵 $B=(m_im_ja_{ij}^2)(m_i=V_iR_i, i,j=1,2,\cdots,n+1)$的 $n+1$ 个特征值为

$$\lambda_0=n\alpha,\lambda_1=-\alpha,\lambda_2=-\alpha,\cdots,\lambda_n=-\alpha \quad (\alpha>0).$$

因为 $n+1$ 阶实对称矩阵 B 有 n 重特征值 $-\alpha$,所以

$$\mathrm{rank}(B+\alpha I)=1,$$

从而矩阵

$$B+\alpha I=\begin{bmatrix} \alpha & & & m_im_ja_{ij}^2 \\ & \alpha & & \\ & & \ddots & \\ m_im_ja_{ij}^2 & & & \alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_{n+1} \end{bmatrix}$$

的任意两行元素对应成比例.设

$$\eta_i=\mu_i\eta_1 \quad (i=2,3,\cdots,n+1).$$

则由 $$m_im_1a_{i1}^2=m_1m_ia_{1i}^2, \quad m_im_1a_{i1}^2=\alpha\mu_i,$$

知 $$\alpha=\mu_im_1m_ia_{1i}^2=\alpha\mu_i^2.$$

因为 $m_im_1a_{i1}^2>0$, $\alpha>0$, 所以 $\mu_i=1 \quad (i=2,3,\cdots,n+1)$.

又 $$m_im_ja_{ij}^2=\mu_im_1m_ja_{1j}^2.$$

因此 $m_im_ja_{ij}^2=m_1m_ja_{1j}^2=m_jm_1a_{j1}^2=\alpha \quad (i,j=2,3,\cdots,n+1, i\neq j)$.

亦即所有的 $V_iV_jR_iR_ja_{ij}^2$均相等$(i\neq j)$.

反之,若所有的 $V_iV_jR_iR_ja_{ij}^2(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$均相等,令

$$m_im_ja_{ij}^2=V_iV_jR_iR_ja_{ij}^2=a\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n+1),$$

易知方程

$$|m_im_ja_{ij}^2-\lambda\delta_{ij}|=0$$

的 $n+1$ 个根为 $na,-a,-a,\cdots,-a(a>0)$,因此(1.2)式等号成立,从而(3.1)式等号成立.

利用不等式(3.1)及算术-几何平均不等式，容易得到

推论 3.2 n 维($n\geqslant 2$)单形 $\mathscr{L}$ 的体积 V，外接球半径 R 与侧面面积 V_i，侧面外接球半径 R_i 之间有不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} R_i\right)^{n+1} \geqslant \frac{(n+1)^{n-1} n^{\frac{n}{2}} (n-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} \frac{(VR)^n}{\prod_{i=1}^{n-1} V_i}, \qquad (3.2)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} V_i R_i\right)^{n+1} \geqslant \frac{(n+1)^{n+1} n^{\frac{n}{2}} (n-1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)!} (VR)^n, \qquad (3.3)$$

其中(3.2)中等号当且仅当所有的 $V_iV_ja_{ij}^2$ 相等时成立，(3.3)中等号当且仅当所有的 $a_{ij}^2(i,j=1,2,\cdots,n+1,i\neq j)$ 相等，亦即单形 $\mathscr{L}$ 正则时成立.

推论 3.3 设有限点集 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_N\}\subset S^{n-1}(R)\subset E^n$ $(N>n\geqslant 2)$，且 $\mathscr{A}$ 的重心与 $S^{n-1}(R)$ 的球心重合，若由 $\mathscr{A}$ 中的任意 n 个和 $n+1$ 个点所作成的 $n-1$ 维和 n 维单形的体积及外接球半径分别为 $V_s^{(n-1)}, R_s^{(n-1)}$ 和 $V_l^{(n)}, R$，则有

$$\left[\sum_{s=1}^{\binom{N}{n}} \left(V_s^{(n-1)} R_s^{(n-1)}\right)^2\right]^{n+1} \geqslant \frac{n^n (n^2-1)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} \left[\sum_{l=1}^{\binom{N}{n+1}} \left(V_l^{(n)} R\right)^2\right]^n, \qquad (3.4)$$

其中等号当且仅当 $\mathscr{A}$ 为伪对称集时成立.

证明 在不等式(1.2)中，令 $k=n-1, l=n, m_i=m_j=1(i,j=1,2,\cdots,N)$，即得(3.4). 再由不等式(1.2)等号成立条件及[1]中的定理3知(3.4)中等号当且仅当 $\mathscr{A}$ 为伪对称集时成立.

参考文献

[1]杨路、张景中，伪对称集与有关的几何不等式，数学学报，29：6(1986)，802－806.

[2]周加农，共球诸点相互距离之间的一个不等式，科学通报，33：14(1988)，1045－1047.

[3]张垚,关于 n 维单形体积的两个不等式,数学的实践与认识,4(1988),71—74.
[4]杨路、张景中,抽象距离空间的秩的概念,中国科学技术大学学报,10:4(1980),52—65.
[5]单墫,一类不等式,数学的实践与认识,3(1981),12—18.

一个经典不等式的高维推广*

刘 立 周加农

中国科学技术大学数学系
西南民族学院数学系

§1 引 言

本世纪 20 年代，一门新的几何学分支诞生了，这就是由 K. Menger开创的距离几何. L. M. Blumenthal 的专著《Theory and Applications of Distance Geometry》集三四十年代距离几何研究成果之精华，使之成为一本距离几何的经典著作. 距离几何不仅自身充满了浓郁的理论趣味，而且还有着广泛的实际应用价值. 近年来距离几何越来越引起国际国内科学家们的注意，并在分子生物化学、统计学、理论物理学等方面得到了应用. 本文运用距离几何的方法把一个经典的几何不等式作了高维的推广.

对于欧氏空间中的点集 $\mathfrak{C}_N=\{P_1,P_2,\cdots P_N\}$，一动点 P 到它们距离的平方和

$$\sum_{i=1}^{N}|P-P_i|^2\geqslant\frac{1}{N}\sum_{i<j}|P_i-P_j|^2. \tag{1.1}$$

这是人们熟知的一个不等式，其中等号成立的充分必要条件为 P

* 本文发表在《数学季刊》2(1988)，收稿日期：1987 年 12 月 8 日.

取 $\mathfrak{C}_N$ 的重心. 杨路教授曾猜想这个不等式对于一般的高维单形的体积也成立. 本文对这一猜想做出了肯定性的证明.

设 $\mathfrak{C}_N=\{P_1,P_2,\cdots,P_N\}$ 为 E^n 中的点集,记 $\mathfrak{C}_N$ 中所有任取 $k+1$ 个点所构成单形的 k 维体积的平方和为 $N_k(k=1,2,\cdots,n)$,记点 $P\in E^n$ 与 $\mathfrak{C}_N$ 中任取 k 点一起构成单形的 k 维体积的平方和为 $N_k(P)(k-1,2,\cdots,n)$. 下面是本文的结果:

定理 对于 E^n 中的点集 $\mathfrak{C}_N$,设它的占有空间维数为 $m(m<N)$,则下列不等式成立:

$$N_k(P)\geqslant\frac{N_k}{N}\qquad(1\leqslant k\leqslant m).\tag{1.2}$$

等号成立的充分必要条件为 P 是 $\mathfrak{C}_N$ 的重心.

推论 若 $\mathfrak{C}_N$ 的占有空间为 E^n,则有

$$N_n(P)\geqslant\frac{N_n}{N}\tag{1.3}$$

成立,且等号成立的充分必要条件为 P 是 $\mathfrak{C}_N$ 的重心.

§2 几个引理

定义 E^n 中的向量$(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$称为单位坐标向量,记为 $e_i(i=1,2,\cdots,n)$. 由$\{e_i\}_1^n$ 中任取 k 个扩张成的 k 维线性子空间称为 E^n 的 k 维坐标子空间.

引理 1 设 $P_1,P_2,\cdots,P_{k+1}$ 为 E_n 中的 $k+1$ 个点,由它们构成单形的 k 维体积的平方等于它们在各 k 维坐标子空间的正投影所构成单形的体积平方之和.

证明 不妨设 P_{k-1} 为原点,P_i 的坐标为$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})(1\leqslant i\leqslant k)$,则它们所构成单形的 k 维体积平方

$$V^2=\frac{1}{(k!)^2}\begin{vmatrix}(P_1,P_1) & (P_1,P_2) & \cdots & (P_1,P_k)\\(P_2,P_1) & (P_2,P_2) & \cdots & (P_2,P_k)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\(P_k,P_1) & (P_k,P_2) & \cdots & (P_k,P_k)\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(k!)^2}\left|\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n}\\x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12} & \vdots & x_{k1}\\x_{12} & x_{22} & \vdots & x_{k2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\x_{1n} & x_{2n} & \vdots & x_{kn}\end{pmatrix}\right|$$

由 Binet-Cauchy 公式[3]

$$V^2=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\frac{1}{(k!)^2}\begin{vmatrix}x_{1,i_1} & x_{1,i_2} & \cdots & x_{1,i_k}\\x_{2,i_1} & x_{2,i_2} & \cdots & x_{2,i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\x_{k,i_1} & x_{k,i_2} & \cdots & x_{k,i_k}\end{vmatrix}^2 \tag{2.1}$$

上式右边和号中的项恰为这 $k+1$ 点在由$\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}$张成的 k 维坐标子空间中投影的体积平方. 引理 1 证毕.

在以下的讨论中,用 $i_1i_2\cdots i_n$ 表示从$\{1,2,\cdots,N\}$中任取 n 个数构成的一个选排列,在不致引起混淆的情况下,简记为 I_n.

引理 2 设 E^n 中点集 $\mathfrak{S}_N$ 的占有空间的维数为 $n(N>n)$,则 $N_n(p)$的自变量 p 有唯一驻点.

证明 设 p_j 的坐标为$(x_{j_1},x_{j_2},\cdots x_{j_n})$,$p$ 的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,由单形体积公式

$$N_n(p)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant N}\frac{1}{(n!)^2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1\\x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,n} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\x_{i_n,1} & x_{i_n,2} & \cdots & x_{i_n,n} & 1\end{vmatrix}^2$$

$$
=\frac{1}{(n!)^3}\sum_{I_n}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n,1} & x_{i_n,2} & \cdots & x_{i_n,n} & 1 \end{vmatrix}^2 \tag{2.2}
$$

对(2.2)式两边求偏导

$$
\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=\frac{2(-1)^{k+1}}{(n!)^3}\sum_{I_n}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n,1} & x_{i_n,2} & \cdots & x_{i_n,n} & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{vmatrix} x_{i_1,1} & \cdots & x_{i_1,k-1} & x_{i_1,k+1} & \cdots & x_{i_1,n} & 1 \\ x_{i_2,1} & \cdots & x_{i_2,k-1} & x_{i_2,k+1} & \cdots & x_{i_2,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_n,1} & \cdots & x_{i_n,k-1} & x_{i_n,k+1} & \cdots & x_{i_n,n} & 1 \end{vmatrix}
$$

令 $C=\frac{2}{(n!)^3}$，记和号内乘积的第一项为 $A(I_n)$，记 $A_k(I_n)$ 为 $A(I_n)$的第一行第 k 列元素的余子式，则

$$
\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=C\cdot(-1)^{k+1}\sum_{I_n}A(I_n)A_k(I_n)\quad(1\leqslant k\leqslant n). \tag{2.3}
$$

将 $A(I_n)$按第一行展开，得

$$
\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=C\cdot(-1)^{k+l+2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{I_n}A_l(I_n)A_k(I_n)\cdot x_l+C
$$

$$
\cdot(-1)^{k+n+3}\cdot\sum_{I_n}A_{n+1}(I_n)A_k(I_n)\quad(1\leqslant k\leqslant n). \tag{2.4}
$$

欲证 $N_n(p)$只有一个驻点，只要证明方程组

$$
\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=0\qquad(1\leqslant k\leqslant n)
$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} C \cdot (-1)^{k+l+2} \sum_{I_n} A_l(I_n) A_k(I_n) \end{vmatrix}$$

$$= C^n \begin{vmatrix} (-1)^{k+l+2} \sum_{I_n} A_l(I_n) A_k(I_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

现考虑二次型

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k+l+2} \sum_{I_n} A_l(I_n) A_k(I_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{I_n} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} y_k \cdot A_k(I_n) \right\}^2. \qquad (2.5)$$

若有$(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n) \neq 0$,使 $f(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n) = 0$,则

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \overline{y}_k A_k(I_n) = 0, \quad \forall\ I_n. \qquad (2.6)$$

因为$\mathfrak{C}_N$的占有空间为E^n,故存在$\mathfrak{C}_N$中的$n+1$点,构成一非退化的n维单形,该单形至少有一个侧面不平行于非零向量$(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots, \overline{y}_n)$,不妨设这个侧面为$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$所在的侧面. 显然点$\overline{p}\{\overline{y}_1 + x_{11}, \overline{y}_2 + x_{12}, \cdots, \overline{y}_n + x_{1n}\}$与$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$不共面. 于是,$\overline{p}$与$\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$构成单形的体积为

$$V(\overline{p}, p_1, \cdots, p_n) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} \overline{y}_1 + x_{11} & \overline{y}_2 + x_{12} & \cdots & \overline{y}_n + x_{1n} & 1 \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

用第一行减去第二行,再按第一行展开得

$$V(\overline{p},p_1,\cdots,p_n)=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\overline{y}_k\cdot A_k(1,2,\cdots,n)\neq 0.$$

这与(2.6)式矛盾，故有 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)>0$，二次型(2.5)正定，从而 $D>0$. 引理证毕.

引理 3 重心 $P_0\left(\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{m1},\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{m2},\cdots,\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{mN}\right)$ 为 $N_n(p)$的驻点.

证明 将 p_0 的坐标代入(2.3)式，得

$$\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=C\cdot(-1)^{k-1}\sum_{I_n}\begin{vmatrix}\frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{m1} & \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{m2} & \cdots & \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}x_{mn} & 1\\ x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,n} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{i_n,1} & x_{i_n,2} & \cdots & x_{i_n,n} & 1\end{vmatrix}\cdot A_k(I_n)$$

$$=\frac{C\cdot(-1)^{k-1}}{N}\cdot\sum_{I_{n,m}}\begin{vmatrix}x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & 1\\ x_{i_1,1} & x_{i_1,2} & \cdots & x_{i_1,n} & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{i_n,1} & x_{i_n,2} & \cdots & x_{i_n,n} & 1\end{vmatrix}A_k(I_n)$$

令 $B=\frac{1}{N}\cdot C\cdot(-1)^{k-1}$，和号内的前一项为 $A(m,I_n)$，将 $A_k(I_n)$按最后一列展开，并记各行元素的代数余子式为 $B_{kl}(I_n)(1\leqslant l\leqslant n)$，则

$$\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}=B\sum_{I_{n,m}}\left[A(m,I_n)\cdot\sum_{l=1}^{n}B_{kl}(I_n)\right]$$

$$=B\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{I_{n,m}}A(m,I_n)B_{kl}(I_n)\right).\qquad(2.7)$$

在(2.7)式的括号内，将 $A(m,In)$的第一行与第 $l+1$ 行交换，

并将下标 m 与 i_1 的位置交换，注意到 B_{kl} 与 m 与 i_1 无关. 于是有

$$\sum_{I_{n,m}} A(m,I_n)B_{kl}(I_n) = -\sum_{I_{n,m}} A(m,I_n)B_{kl}(I_n) = 0.$$

故
$$\left.\frac{\partial N_n(p)}{\partial x_k}\right|_{P_0} = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

引理 3 证毕.

下面的引理 4 是文献[1]中预备定理的特款.

引理 4 对 E^n 中的点集 $\mathfrak{C}_N = \{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$,

$$N_n = \frac{N}{(n!)^2} \cdot \sigma_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n). \tag{2.8}$$

其中 σ_n 为 n 次初等对称函数，$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n\}$ 为 $\mathfrak{C}_N$ 的重心 P_0 到 $\mathfrak{C}_N$ 各点的有向距离在任意单位向量 e 上投影之长的平方和 $\sum_{i=1}^{N} h_i^2(e)$ 关于向量 e 所取得的稳定值.

§3 定理的证明

不妨设 $\mathfrak{C}_N$ 就在 $E^m \times \{0\}^{n-m}$ 中，我们断言，只要推论成立，则定理成立.

事实上，假定推论已经成立，若 $p \in E^m \times \{0\}^{n-m}$，则不等式对于 $\mathfrak{C}_N$ 在 $E^m \times \{0\}^{n-m}$ 的各 k 维坐标子空间的诸投影皆成立. 由引理 1 易知不等式在 $E^m \times \{0\}^{n-m}$ 中成立，等号成立的充分必要条件为 P 使关于各坐标子空间的不等式取等号，亦即 P 取重心. 显然，当 $P \in E^n \backslash E^m \times \{0\}^{n-m}$ 时，记 P 在 $E^m \times \{0\}^{n-m}$ 的投影为 $\tilde{P}$，有 $N_k(P) > N_k(\tilde{P})$，从而定理成立.

以下证明推论的正确性：

由引理 2 和引理 3，知 P_0 为 $N_n(P)$ 唯一的驻点，而 $N_n(P) > 0$ 无上界，故重心 P_0 为 $N_n(P)$ 的极小点，即有

$$N_n(P) \geqslant N_n(P_0). \tag{3.1}$$

作 $\overline{\mathfrak{C}}_N = \{P_0\} \cup \mathfrak{C}_N$，由引理 4

$$\overline{N}_n = \frac{N+1}{(n!)^2}\sigma_n(\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \cdots, \overline{\lambda}_n). \tag{3.2}$$

因 P_0 为重心，$\overline{\lambda}_i = \lambda_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.

又由 $\overline{\mathfrak{C}}_N$ 的定义，$\overline{N}_n = N_n(P_0) + N_n$. (3.3)

由(2.8)、(3.2)、(3.3)，得

$$N_n(P_0) = \frac{1}{N} \cdot N_n. \tag{3.4}$$

结合(3.1)、知推论成立. 定理证毕.

参考文献

[1]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，Vol. 23、No. 5 1980. 9. 740—749.

[2]Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, New York, 1970.

[3]许以超，代数学引论，上海科学技术出版社，上海，1966，178—180.

关于垂足单形体积的一个猜想*

张 垚

湖南教育学院数学系(长沙,410012)

一、引　言

设 E^n 中 n 维单形 $\sum=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的顶点集为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$,有向体积为 $V(\sum)$,以 $\{A_1,\cdots,A_{i-1},A_{i+1},\cdots,A_{n+1}\}$ 为顶点集的 $n-1$ 维单形 $\overline{f_i}$ 称为 $\sum$ 的"侧面"(下文中 $\overline{f_i}$ 所在的 $n-1$ 维超平面也记为 $\overline{f_i}$),"侧面" $\overline{f_i}$ 的 $n-1$ 维体积记为 $|\overline{f_i}|$,自 E^n 中任意一点 M 向超平面 $\overline{f_1},\overline{f_2},\cdots,\overline{f_{n+1}}$ 作垂线,垂足分别为 $H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}$,并称顶点集为 $\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$ 的单形 $\sum_M$ 为 M 关于 $\sum$ 的垂足单形,其 n 维有向体积记为 $V(\sum_M)$ (当 $\sum_M$ 为退化情形时,$V(\sum_M)=0$).

1985 年苏化明在[1]中提出如下

猜想　当 M 是 $\sum$ 内一点时,有

* 本文主要结果发表在《系统科学与数学》4(1992). 收稿日期:1989 年 12 月 30 日.

$$|V(\sum_M)| \leqslant \frac{1}{n^n}|V(\sum)|, \tag{1.1}$$

且等号成立的充要条件是 M 为 $\sum$ 的外心(外接超球的中心).

1987 年毛其吉、左铨如在[2]中证明了当 M 是 $\sum$ 的内心(内切超球的中心)时,不等式(1.1)是正确的.本文将给出空间任意一点的垂足单形的顶点坐标公式,有向体积公式及空间顶点角的一个三角形不等式,并对 $\sum$ 内或 $\sum$ 的"侧面"内任意一点 M 证明不等式(1.1)是正确的.但猜想中所述使(1.1)中等号成立的充要条件不正确,同时给出了使(1.1)中等号成立的正确的充要条件.全文还推广了[3]、[4]中的主要结论,改进了[7]中一个结论及[9]中的结论.

二、引理及主要结论

设 $\overline{f_i}$ 的单位法向量为 e_i,令 $D_i=\det(\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{i-1},\bar{e}_{i+1},\cdots,\bar{e}_{n+1})$,我们称 $\alpha_i=\arcsin|D_i|(i=1,2,\cdots,n+1)$ 为 $\sum$ 中顶点 A_i 所对应的顶点角[3].

引理 1[3] n 维单形 $\sum$ 的体积 $|V(\sum)|$,"侧面"体积 $|\overline{f_i}|$ 及顶点角 α_i 满足

$$\sin\alpha_i = n^n|V(\sum)|^{n-1}\bigg/\left(n!\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n+1}|\overline{f_j}|\right) \quad (i=1,2,\cdots,n+1). \tag{2.1}$$

引理 2 设 E^n 中一点 M 关于坐标单形 $\sum=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的规范重心坐标为 $(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$,$M$ 关于 $\sum$ 的垂足单形为 $\sum_M=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$,又 H_i 关于 $\sum$ 的规范重心坐标为

$(t_{i1},t_{i2},\cdots,t_{i,n+1})(i=1,2,\cdots,n+1)$，那么

$$t_{ij}=\begin{cases}0 & (j=i),\\ (\lambda_j|\overline{f}_j|+\lambda_i|\overline{f}_i|\cos\varphi_{ij})/|\overline{f}_j| & (j\neq i),\end{cases} \quad i,j=1,2,\cdots,n+1. \tag{2.2}$$

其中 $\varphi_{ij}=\overline{f}_i\widehat{,}\overline{f}_j$ 是两"侧面"$\overline{f}_i,\overline{f}_j(i\neq j)$所夹内二面角，并适当规定"侧面"法线 $\overline{e}_i,\overline{e}_j$ 的方向后，使 $\varphi_{ij}=\pi-\overline{e}_i\widehat{,}\overline{e}_j$ 成立.

引理 2 是[6]中引理 1 的推广.

证明 过 $M,H_i,H_j(i\neq j)$ 作二维平面 π_{ij}，则 $\pi_{ij}\perp\overline{f}_i$，$\pi_{ij}\perp\overline{f}_j$. 设 π_{ij} 交 $\overline{f}_i\cap\overline{f}_j(i\neq j)$ 于 S，而 $\gamma_a(a=i,j)$ 表示 M 到 f_a 的有向距离 $\overline{MH_a}$，当 M 与 A_a 在超平面 $\overline{f}_a$ 同侧时，γ_a 取正值，异侧时，γ_a 取负值. 在 π_{ij} 内过 H_i 作直线 SH_j 的垂线，垂足为 G_i，则 $H_iG_i\perp\overline{f}_j$，$H_iG_i/\!/MH_j$. 记 H_i 到 G_i 的有向距离 $\overline{H_iG_i}$ 为 h_{ij}. 当 H_i 与 A_j 在 $\overline{f}_j$ 同侧时，h_{ij} 取正值；异侧时，h_{ij} 取负值，则 h_{ij} 也是 H_i 到 $\overline{f}_j$ 的有向距离，于是当 $i\neq j$ 时，显然有

$$h_{ij}=\gamma_j+\gamma_i\cos\varphi_{ij}.$$

而由规范重心坐标定义及 n 维单形体积公式，有

$$\gamma_a=\frac{n\lambda_a|V(\sum)|}{|\overline{f}_a|}\quad(a=i,j).$$

所以

$$h_{ij}=\begin{cases}0 & (j=i)\\ [(\lambda_j/|\overline{f}_j|)+(\lambda_i/|\overline{f}_i|)\cos\varphi_{ij}]\cdot n|V(\sum)| & (j\neq i)\end{cases}$$

再由规范重心坐标定义，得

$$t_{ij}=\begin{cases}0 & (j=i)\\ h_{ij}|\overline{f}_j|/(n|V(\sum)|)=(\lambda_j|\overline{f}_j|+\lambda_i|\overline{f}_i|\cos\varphi_{ij})/|f_j| & (j\neq i),\end{cases}$$

$(i,j=1,2,\cdots,n+1)$. 证毕.

引理 3 设 E^n 中 n 维单形 $\sum=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的外心 O

的规范重心坐标为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$，则

$$\lambda_i=D_{0i}/D\left(\sum\right)\quad(i=1,2,\cdots,n+1).\tag{2.3}$$

其中 D_{ki} 是 $\sum$ 的 $n+2$ 阶 Cayley-Menger 行列式

$$D\left(\sum\right)=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & & & & \\ 1 & & a_{ij}^2 & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix}\qquad\begin{pmatrix}i,j=1,2,\cdots,n+1;\\ a_{ij}=a_{ji}=|\overline{A_iA_j}|;\\ a_{ii}=0\end{pmatrix}$$

中第 k 行、第 i 列处元素的代数余子式，并约定 $D\left(\sum\right)$ 的行和列的编号从 0 到 $n+1$.

证明 设 $\sum$ 的外接超球半径为 R，则由[8]中定理 1 公式 Ⅱ，有

$$R^2=|\overline{OA_i}|^2=-\alpha^T\overline{D}\alpha+e_i^T\overline{D}\alpha.\tag{2.4}$$

其中

$$\alpha=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})^T\in R^{n+1},$$

$$\overline{D}=(a_{ij}^2)\in R^{(n+1)\times(n+1)},$$

$i,j=1,2,\cdots,n+1$；$a_{ij}=a_{ji}=|\overline{A_iA_j}|$；$a_{ii}=0$，$e_i$ 是 $n+1$ 阶单位阵 I_{n+1} 的第 i 列，"T"表向量转置. 记 $K=R^2+\alpha^T\overline{D}\alpha$，则由(2.4)有

$$\begin{pmatrix}e_1^T\\ e_2^T\\ \vdots\\ e_{n+1}^T\end{pmatrix}\overline{D}\alpha=K\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

即 $\overline{D}\alpha=Ke.$ (2.5)

其中 $e\triangleq(1,1,\cdots,1)^T\in R^{n+1}$，而由[10]中引理 3 知

$$\det\overline{D}=(-1)^n2^{n-1}(n!)^2\left|V\left(\sum\right)\right|^2R^2\neq0,$$

故由(2.5)应用 Cramer 规则可解出.

$$\lambda_i = KC_i/\det \overline{D}(i=1,2,\cdots,n+1). \tag{2.6}$$

其中 C_i 是用向量 e 代替 $\overline{D}$ 中第 i 列而得到的行列式，适当交换 C_i 中列的顺序易知 $C_i=D_{0i}(i=1,2,\cdots,n+1)$，再由

$$1=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = K\sum_{i=1}^{n+1}D_{0i}/\det\overline{D}=KD\left(\sum\right)/\det\overline{D},$$

得 $K=\det \overline{D}/D\left(\sum\right)$，代入(2.6)即得(2.3). 证毕.

定理 1 n 维单形 $\sum=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$ 的诸顶点角 α_i 与任意 $n+1$ 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1}x_i\neq 0\right)$ 之间满足下列不等式：

$$\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\alpha i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)^n, \tag{2.7}$$

且(2.7)中等号成立的充要条件是下列各等式都成立：

$$x_k\Big/\sum_{i=1}^{n+1}x_i=\cos\varphi_{ij}/[n(\cos\varphi_{ij}+\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj})]$$

$$\begin{Bmatrix} i,j,k\text{ 互不相同} \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1 \end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

其中 $\varphi_{ij}=\widehat{f_i,f_j}$ 为 $\sum$ 的内二面角，特别当 $\sum$ 为正则单形且 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$时，(2.7)中等号成立，应用高维余弦定理[5]：

$$\cos\varphi_{ij}=-D_{ij}\Big/\left(\sqrt{D_{ii}}\sqrt{D_{jj}}\right)\quad(i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n+1). \tag{2.9}$$

条件(2.8)可写成下列等价条件：

$$x_k\Big/\sum_{i=1}^{n+1}x_i=D_{ij}D_{kk}/[n(D_{ij}D_{kk}-D_{ik}D_{kj})]$$

$$\begin{Bmatrix} i,j,k\text{ 互不相同；} \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1 \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

其中 D_{ij}含义见引理 3.

证明 以$(\bar{e}_i,\bar{e}_j)$表示$\sum$的两侧面$\overline{f}_i$、$\overline{f}_j$$(i\neq j)$的单位法向量$\bar{e}_i,\bar{e}_j$的内积，适当规定$\bar{e}_i(i=1,2,\cdots,n+1)$的方向后，有

$$(\bar{e}_i,\bar{e}_j)=\cos \widehat{\bar{e}_i,\bar{e}_j}=-\cos\varphi_{ij}.$$

设Q是以$\sqrt{x_1}\bar{e}_1,\sqrt{x_2}\bar{e}_2,\cdots,\sqrt{x_{n+1}}\bar{e}_{n+1}$为列的矩阵，令$G=Q^TQ=(g_{ij})$，

$$g_{ij}=\begin{cases}x_i & (i\neq j),\\ -\sqrt{x_i}\sqrt{x_j}\cos\varphi_{ij} & (i\neq j).\end{cases}$$

考虑G的特征方程

$$|\lambda I_{n+1}-G|=\lambda^{n+1}-b_1\lambda^n+b_2\lambda^{n-1}-\cdots+(-1)^nb_n\lambda+(-1)^{n+1}b_{n+1}=0.$$

因Q^TQ与QQ^T的非零特征值相同，不超过n个，故$b_{n+1}=0$. 上述方程去掉一个零根后，得

$$\lambda^n-b_1\lambda^{n-1}+b_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^nb_n=0. \tag{2.11}$$

因$x_i\geqslant0$，G为实正半定矩阵，故(2.11)的n个根$\beta_1,\cdots,\beta_n$全为非负实数，故有

$$b_1/n=(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)/n\geqslant\sqrt[n]{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}=b_n^{\frac{1}{n}}. \tag{2.12}$$

且(2.12)中等号成立的充要条件是$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n$，而$b_n$是$G$的所有$n$阶主子式之和：

$$b_n=\sum_{i=1}^{n+1}G_{ii},$$

而按本节开始规定的记号，有

$$G_{ii}=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)|D_i|^2=\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\alpha_i.$$

从而

$$b_n=\sum_{i=1}^{n+1}G_{ii}=\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}x_j\right)\sin^2\alpha_i. \tag{2.13}$$

又

$$b_1=\mathrm{tr}G=\sum_{i=1}^{n+1}x_i, \tag{2.14}$$

将(2.13)、(2.14)代入(2.12)即知(2.7)成立，且(2.7)中等号成立的充要条件是

$$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=\frac{1}{n}\mathrm{tr}G=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}x_i,$$

即实对称矩阵 $B\triangleq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}x_i\right)I_{n+1}-G$ 的 $n+1$ 个特征值中有 n 个为零，另一个为$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1}x_i$，也就是 B 的秩为 1，这等价于 B 的任意两行元素对应成比例：

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}x_l-x_i}{\sqrt{x_k}\sqrt{x_i}\cos\varphi_{ki}}=\frac{\sqrt{x_i}\sqrt{x_k}\cos\varphi_{ik}}{\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n+1}x_l-x_k}$$

$$=\frac{\sqrt{x_i}\sqrt{x_j}\cos\varphi_{ij}}{\sqrt{x_k}\sqrt{x_j}\cos\varphi_{kj}}\left(\begin{array}{l}i,j,k\text{ 互不相同},\\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1\end{array}\right)$$

此即(2.8)式成立. 特别地，若 $x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}$，且$\sum$为正则单形时，由(2.9)易算出 $\cos\varphi_{ij}=\frac{1}{n}(i\neq j)$，这时(2.8)显然成立，故这时(2.7)中等号成立.

推论 1　n 维单形$\sum$的诸顶点角 α_i 满足：

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n+1}\sin^2\alpha_i\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{2.15}$$

$$(2)\quad \prod_{i=1}^{n+1}\sin\alpha_i\leqslant\left[\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{2}}, \tag{2.16}$$

且(2.15)、(2.16)中等号成立的充要条件是$\sum$为正则单形.

不等式(2.15)、(2.16)分别是[3]、[4]中的主要结论，但[3]、[4]中仅证明$\sum$为正则单形是(2.15)、(2.16)中等号成立的充分条件.

证明　不等式(2.7)中令$x_1=x_2=\cdots=x_{n+1}=1$，便得(2.15). 对(2.15)左端应用平均值不等式便得(2.16).

若$\sum$为正则单形，则

$$\alpha_i=\arcsin\begin{vmatrix} 1 & & & & -\frac{1}{n} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ -\frac{1}{n} & & & & 1 \end{vmatrix}_{(n+1)(n+1)}$$

$$=\arcsin\left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}},$$

故(2.15)、(2.16)中等号成立. 反之若(2.15)、(2.16)中等号成立，则由(2.8)得

$$1/(n+1)=\cos\varphi_{ij}/[n(\cos\varphi_{ij}+\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj})],$$

即

$$\cos\varphi_{ij}=n\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj}\neq 0\left(\begin{array}{l} i,j,k\text{ 互不相同}, \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1 \end{array}\right).$$

由i,j,k的任意性，有

$$\cos\varphi_{kj}\Big/\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)\Big/\cos\varphi_{ik}=\frac{\cos\varphi_{kj}}{\cos\varphi_{ij}}\left(\begin{array}{l} i,j,k\text{ 互不相同}, \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1 \end{array}\right).$$

注意到$\varphi_{ki}=\varphi_{ik}$，得$\cos\varphi_{ik}=\pm\frac{1}{n}$，$\varphi_{ik}=\arccos\frac{1}{n}$或$\varphi_{ik}=\pi-\arccos\frac{1}{n}$
$(i\neq k, i,k=1,2,\cdots,n+1)$.

设n维正则单形$\overline{\sum}$的诸内二面角为$\bar{\varphi}_{ij}(i\neq j, i,j=1,2,\cdots,$

$n+1$)，由 $n\geqslant 2$ 知

$$\overline{\varphi}_{ij}=\arccos\frac{1}{n}\leqslant\varphi_{ij}\quad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n+1).$$

于是由[6]中§4定理2知$\sum$与$\sum$相似，故$\sum$为正则单形.

推论 2 n维单形$\sum$的体积$|V(\sum)|$和各"侧面"体积$|f_i|$满足下列不等式：

$$(1)\quad |V(\sum)|^{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n+1}|f_i|^2\leqslant\frac{(n+1)^n(n!)^2}{n^{3n}}\prod_{i=1}^{n+1}|f_i|^2. \tag{2.17}$$

$$(2)\quad |V(\sum)|\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n!)^2}{n^{3n}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\prod_{i=1}^{n+1}|f_i|^{\frac{n}{n^2-1}}, \tag{2.18}$$

且(2.17)、(2.18)中等号成立的充要条件是$\sum$为正则单形.

不等式(2.18)是[7]中系1的结论，但[7]中系1仅证明$\sum$为正则单形是使(2.18)中等号成立的充分条件.

证明 将(2.1)式代入(2.15)和(2.16)便得要证结论.

定理 2 设E^n中一点M关于坐标单形$\sum=\{A_1,A_2,\cdots,A_{n+1}\}$的规范重心坐标为$(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})$，又$M$关于$\sum$的垂足单形为$\sum_M=\{H_1,H_2,\cdots,H_{n+1}\}$.

(1) 当M是E^n中任意一点时，有

$$V(\sum\nolimits_M)=(-1)^n V(\sum)\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\lambda_j\right)\sin^2\alpha_i; \tag{2.19}$$

(2) 当M是E^n中任意一点时，有

$$V\left(\sum_M\right)=\frac{(-1)^n n^{2n}\left(V\left(\sum\right)\right)^{2n-1}}{(n!)^2\left(\sum_{i=1}^{n+1}|\bar{f}_i|\right)^2}\sum_{i=1}^{n+1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}\lambda_j\right)|\bar{f}_i|^2;$$

(2.20)

(3) 当 M 是 $\sum$ 内或 $\sum$ 的"侧面"内任意一点时，有

$$\left|V\left(\sum_M\right)\right|\leqslant\frac{1}{n^n}\left|V\left(\sum\right)\right|, \qquad (2.21)$$

且(2.21)中等号成立的充要条件是下列等式都成立：

$$\lambda_k=\cos\varphi_{ij}/[n(\cos\varphi_{ij}+\cos\varphi_{ik}\cos\varphi_{kj})]\begin{pmatrix} i,j,k\text{ 互不相同}, \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1\end{pmatrix}.$$

(2.22)

利用(2.9)，条件(2.22)也可写成下列等价条件：

$$\lambda_k=D_{ij}D_{kk}/[n(D_{ij}D_{kk}-D_{ik}D_{kj})]\begin{pmatrix} i,j,k\text{ 互不相同}, \\ i,j,k=1,2,\cdots,n+1\end{pmatrix}.$$

(2.23)

其中 φ_{ij}，D_{ij} 的含义同定理 1.

证明 (1)由 n 维单形体积公式[1]及引理 2，得

$$\frac{V\left(\sum_M\right)}{V\left(\sum\right)}=|t_{ij}| \quad (i,j=1,2,\cdots,n+1). \qquad (2.24)$$

其中 t_{ij} 由(2.2)确定，将(2.2)代入(2.24)并经过计算、化简、整理便得(2.19)式(计算过程省略).

(2) 将(2.1)代入(2.19)即得(2.20).

(3) 注意到 M 为 $\sum$ 内或 $\sum$ 的"侧面"内一点时，有 $\lambda_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$，并注意到 $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1$，由定理 1 即知结论 3 成立.

我们在[9]中仅对 $\sum$ 内一点 M 证明了(2.19)、(2.20)和

(2.21)成立，并且只得到使(2.21)中等号成立的一个充分条件，故定理 2 改进了[9]中结论.

三、讨　论

(1)　当 $n=2$ 时，经过计算易知不等式(2.21)中等号成立的充要条件(2.23)等价于(2.3)，即 M 为 2 维单形(三角形)的外心．但当 $n\geqslant 3$ 时，条件(2.23)与(2.3)并不等价，也就是猜想中所叙关于(2.21)中等号成立的充要条件不正确．事实上，如果设 3 维单形(四面体) $\sum_3=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 的棱长满足

$$|\overline{A_1A_2}|=|\overline{A_1A_3}|=|\overline{A_1A_4}|=4\sqrt{3},$$
$$|\overline{A_2A_3}|=|\overline{A_3A_4}|=|\overline{A_4A_2}|=6,$$

由(2.3)式易算出 $\sum$ 的外心 O 关于 $\sum$ 的规范重心坐标为

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{2}{9},\frac{2}{9}),$$

而由立体几何知识或 n 维单形体积公式[5]易算出 $\sum$ 的体积和各侧面面积分别为

$$|V(\sum)|=18\sqrt{3},|\overline{f_1}|=9\sqrt{3},|\overline{f_2}|=|\overline{f_3}|=|\overline{f_4}|=3\sqrt{39},$$

代入定理 2 中(2.20)式得 M 为外心 O 时，垂足单形 $\sum_M$ 的体积 $|V(\sum_M)|$ 与单形 $\sum$ 的体积 $|V(\sum)|$ 满足

$$\frac{|V(\sum_M)|}{|V(\sum)|}=\frac{3^6|V(\sum)|^4}{(3!)^2\prod_{j=1}^{4}|\overline{f_j}|^2}\sum_{i=1}^{4}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{4}\lambda_j\right)|\overline{f_i}|^2=\frac{80}{13^3}<\frac{1}{3^3},$$

即(2.21)中等号不成立.

另一方面，若取 M 的规范重心坐标$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$满足(2.23)，经过计算知

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=(\frac{5}{18},\frac{13}{54},\frac{13}{54},\frac{13}{54}),$$

这时 M 不是 $\sum=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 的外心，但 M 关于 $\sum$ 的垂足单形 $\sum_M$ 的体积 $|V(\sum_M)|$ 与 $\sum$ 的体积 $|V(\sum)|$ 满足

$$\frac{|V(\sum_M)|}{|V(\sum)|}=\frac{3^6|V(\sum)|^4}{(3!)^2\prod_{j=1}^{4}|\overline{f}_j|^2}\sum_{i=1}^{4}\left(\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{4}\lambda_j\right)|\overline{f}_i|^2=\frac{1}{3^3},$$

即(2.21)中等号成立.

可见 $n\geqslant3$ 时，M 为单形的外心既不是使(2.21)中等号成立的充分条件又不是必要条件，故猜想中关于(2.21)中等号成立的充要条件不正确.

(2) 由[11]中结论知道，当 $n=2$ 时，不等式(2.21)对 2 维单形($\triangle A_1A_2A_3$)外接圆内任意一点 M 都成立，而 $n\geqslant3$ 时，我们在定理 2 中仅对 $\sum$ 内或 $\sum$ 的"侧面"内任意一点证明了(2.21)成立. 自然要问：当 $n\geqslant3$ 时，使(2.21)成立的点 M 的集合 S_n 是什么？这个问题有待进一步讨论.

参考文献

[1]苏化明，计算关于单形的一个不等式，数学通报，5(1985)，43～46.

[2]毛其吉，左铨如，切点单形的一个几何不等式，数学的实践与认识，4(1987)，71～75.

[3]蒋星耀，关于高维顶点角的不等式，数学年刊，8(A)6(1987)，668～670.

[4]尹景尧，冯渭川，关于空间角正弦的一个不等式及应用，数学的实践与认识，3(1988)，51～56.

[5]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报 23:5(1980)，740～749.

[6]杨路、张景中，预给二面角的单形嵌入 E^n 的一个充分必要条件，数学学报 26:2(1983)，250～257.

[7]张景中、杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科技大学学报 Vol.11，No.2(1981)，1～8.

[8]张垚，n 维单形中的距离公式和距离不等式，湖南教育学院自然科学学报 1(1988)，23～30.

[9]张垚，关于单形的一个猜想，湖南教育学院学报，5(1990)，119～123.

[10]张垚，关于 n 维单形中的两个体积不等式，数学的实践与认识，4(1986)，71～71.

[11]程龙，垂足三角形，初等数学论丛(第3辑)，上海教育出版社，5(1981)，100～113.

涉及两个单形的一类不等式*

陈　计　　马　援

宁波大学应用数学系(315211)

中国科学院数学所(100080)

本文中,我们建立了下列主要结果:

定理　设$\sum_A$和$\sum_B$为n维Euclid空间$E^n(n>2)$中的两个单形,它们的棱长分别是$a_i,b_i(i=1,2,\cdots,C_{n+1}^2)$,它们的体积分别是$V_1$和$V_2$.则当$\theta\in(0,1]$时,有

$$\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i^{2\theta}\left(\sum_{j=1}^{C_{n+1}^2}b_j^{2\theta}-nb_i^{2\theta}\right)\geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}(V_1V_2)^{2\theta/n},\tag{1}$$

等号成立当且仅当$\sum_A$和$\sum_B$均为正则单形.

几个引理.

引理 1[1]　设a,b,c和Δ分别表示$\triangle ABC$的三边长和面积,则当$0<\theta<1$时,有

$$3\left(\frac{16\Delta^2}{3}\right)^{\theta}\leqslant 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta},\tag{2}$$

等号成立当且仅当$a=b=c$.

* 本文发表在《数学研究与评论》2(1989),收稿日期:1987年3月16日.

引理 2[2] 在 n 维单形的体积 V 及其诸 $n-1$ 维单形边界的体积 $V_i(i=1,2,\cdots,n+1)$ 之间有不等式：

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{1/2(n-2)}\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{n/(n^2-1)}, \tag{3}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

引理 3[3] 在 $n(>2)$ 维单形的体积 V 及其诸三角形侧面积 Δ_i $(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^3)$ 之间有不等式：

$$\prod_{i=1}^{c_{n+1}^3}\Delta_i\geqslant\left[\frac{3^{n/2}(n!)^2}{(n+1)2^n}\right]^{(n^2-1)/6}V^{(n^2-1)/3}, \tag{4}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

引理 4[4] 在 n 维单形的体积 V 及诸棱长 $a_i(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^2)$ 之间有不等式：

$$n!\ V\leqslant\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{1/2}\prod_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{2/(n+1)}, \tag{5}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

引理 5 在 $n(>2)$ 维单形的体积和它诸棱长 $a_i(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^2)$ 之间，当 $0<\theta<1$ 时，有

$$2\sum_{1\leq i<j\leq c_{n+1}^2}a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}-(n-1)\prod_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{4\theta}\geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}, \tag{6}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

证明 记 n 维单形的三角形侧面 Δ_k 的三条边长为 a_{k1},a_{k2},a_{k3} $(k=1,2,\cdots,c_{n+1}^3)$，则

$$(6)\text{左边}=\sum_{k=1}^{c_{n+1}^3}(2a_{k2}^{2\theta}a_{k2}^{2\theta}+2a_{k3}^{2\theta}a_{k1}^{2\theta}+2a_{k1}^{2\theta}a_{k2}^{2\theta}-a_{k1}^{4\theta}-a_{k2}^{4\theta}-a_{k3}^{4\theta})+Q,$$

其中 Q 是 $2C_{C_{n+1}^2}^2-6C_{n+1}^3(=6C_{n+1}^4)$ 项 $a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}$ 之和，a_i 与 a_j 不在一个

三角形上. 用引理 1,得

$$(6)左边\geqslant\sum_{k=1}^{C_{n+1}^{3}}3\left(\frac{16\Delta_k^2}{3}\right)^{\theta}+Q;$$

用算术平均-几何平均不等式

$$(6)左边\geqslant 3C_{n+1}^{3}\left(\prod_{k=1}^{C_{n+1}^{3}}\frac{16\Delta_k^2}{3}\right)^{\theta/C_{n+1}^{3}}+6C_{n+1}^{4}\left(\prod_{i=1}^{C_{n+1}^{2}}a_i\right)^{4\theta/C_{n+1}^{2}};$$

用引理 3 和 4,得

$$\begin{aligned}(6)左边&\geqslant 3C_{n+1}^{3}\left(\frac{16}{3}\right)^{\theta}\left[\frac{3^{n/2}(n!)^2}{(n+1)2^n}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}+6C_{n+1}^{4}\\&\quad\cdot\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}\\&=\frac{(n+1)n(n-1)}{2}\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}\\&\quad+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\cdot\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}\\&=(6)右边.\end{aligned}$$

由上述过程不难看出,(6)中等号成立当且仅当单形正则.

定理的证明:可简记为$\sum_{1}^{C_{n+1}^{2}}=\sum$. 由引理 5 及 Cauchy 不等式,可得

$$\begin{aligned}&n\sum a_i^{2\theta}b_i^{2\theta}+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_1^{2\theta/n}V_2^{2\theta/n}\\&\leqslant\left\{n\sum a_i^{4\theta}+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_1^{4\theta/n}\right\}^{1/2}\times\left\{n\sum b_i^{4\theta}\right.\\&\quad\left.+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_2^{4\theta/n}\right\}^{1/2}\\&\leqslant\left(\sum a_i^{2\theta}\right)\left(\sum b_i^{2\theta}\right).\end{aligned}$$

由此可得不等式(1);等号成立的条件显然是$\sum_A$和$\sum_B$均为正则.

几点注记：

1° 当 $n=2,\theta=1$ 时，(1)是 Neuberg-Pedoe 不等式，但这时等号成立的条件是两个三角形对应相似.

2° 不难由引理 5 推得

$$2\sum_{1\le i<j\le C_{n+1}^2} a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}-\sum_{i=1}^{C_{n+1}^2}a_i^{4\theta}$$

$$\geqslant 2^{2\theta-2}n(n+1)(n^2+n-4)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}, \tag{7}$$

再用定理的证明过程可得

$$\sum a_i^{2\theta}\left(\sum b_j^{2\theta}-2b_i^{2\theta}\right)$$

$$\geqslant 2^{2\theta-2}n(n+1)(n^2+n-4)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}(V_1V_2)^{2\theta/n}. \tag{8}$$

当 $\theta=1$ 和 $\frac{1}{2}$ 时，上式是苏化明在[3]中建立的.

3° 将不等式(6)两边开 θ 次方，并令 $\theta\to 0$，即得引理 4.

参考文献

[1]A. Oppenheim, Inequalities irvolving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 496(1974), 257-263.

[2]张景中、杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，1981 年第 2 期，1—8.

[3]苏化明，关于单形的两个不等式，科学通报，1987 年第 1 期，1-3.

[4]G. Korchmáros, Atti Accad Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)56(1974), No. 6, 876-879.

关于联系两个单形的几何恒等式及应用*

尹景尧　陈奉孝

潍坊职业大学(山东,261041)

关于 n 维欧氏空间 E^n 中二单形之间的几何关系的研究,一向是距离几何中被关注的课题. 如仅就周知的涉及两个二维单形的 Neuberg-Pedoe 不等式而言,1942 年 Pedoe[1] 给出其第一个证明,此后数十年中,Pedoe和别人又相继提供了许多新的证明,几何的或纯代数的[2-5],Pedoe 的最近的一个证明发表于 1976 年[4],而到 1981 年又由杨路、张景中将其推广到高维空间[6].

本文的结果在于给出联系两个单形的一个恒等式,并由此推出了一些新的涉及两个单形的不等式.

令 $\sum$、$\sum'$ 表示 E^n 中的单形,其顶点集分别为 $\{p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}\}$ 和 $\{p'_1, p'_2, \cdots, p'_{n+1}\}$;其 n 维体积分别为 V、V';$\sum$(或 $\sum'$)中与顶点 p_i(或 p'_i)相对的侧面 F_i(或 F'_i)之 $n-1$ 维体积为 U_i(或 U'_i);$\sum$(或 $\sum'$)之顶点 p_i(或 p'_i)到 $\sum'$(或 $\sum$)的侧面 F'_j(或 F_j)的有向距离为 h_{ij}(或 h'_{ij}).

令 (h_{ij})、(h'_{ij}) 分别表示以 h_{ij}、h'_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n+1)$ 为其元素之 $n+1$ 阶方阵. 我们将证明如下的定理.

* 本文发表在《数学进展》3(1992),收稿日期:1990 年 2 月 14 日.

定理 对 E^n 中的两个单形 $\sum$、$\sum'$，有

$$\det(h_{ij})\det(h'_{ij})=\frac{n^{2(n+1)}(VV')^{n+1}}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}v_i v'_i}. \tag{1}$$

证明 令 E^n 中单形 $\sum$ 的侧面 F_i 所在 $n-1$ 维超平面方程为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+d_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,n+1),$$

依 Cramer 法则易知 F_i 所对顶点 p_i 之笛卡尔坐标为

$$\left(\frac{A_{i1}}{D_i},\frac{A_{i2}}{D_i},\cdots,\frac{A_{in}}{D_i}\right).$$

这里 D_i、$A_{ik}(k=1,2,\cdots,n)$ 分别是

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & d_{n+1} \end{vmatrix}$$

中 d_i 及 a_{ik} 之代数余子式.

F_i 上之高线长为

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\frac{A_{ik}}{D_i}+d_i\right|\Bigg/\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2}=\frac{|\Delta|}{|D_i|\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2}},$$

从而单形 $\sum$ 之 n 维体积

$$V=\frac{v_i|\Delta|}{n|D_i|\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2}} \tag{2}$$

取 $i=1,2,\cdots,n+1$，将所得诸等式连乘，得

$$V^{n+1}=\frac{\prod_{i=1}^{n+1} v_i |\Delta|^{n+1}}{n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}|D_i|\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2}},\tag{3}$$

同理

$$V'^{n+1}=\frac{\prod_{i=1}^{n+1} v'_i |\Delta'|^{n+1}}{n^{n+1}\prod_{i=1}^{n+1}|D'_i|\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{ik}}},\tag{4}$$

由(3)、(4)可得

$$\frac{n^{2(n+1)}(VV')^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1}v_i v'_i}=\frac{|\Delta\Delta'|^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n+1}|D_i||D'_i|\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{ik}}}.\tag{5}$$

$\sum$之 p_i 到$\sum'$之 F'_j的有向距离

$$h_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}a'_{jk}\frac{A_{ik}}{D_i}+d'_j}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{jk}}},$$

便有

$$\det\ (h_{ij})=\det\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}a'_{jk}A_{ik}+d'_jD_i}{\pm D_i\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{jk}}}\right)=\frac{1}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}D_i\prod_{j=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{jk}}}$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & d'_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & d'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n+1,1} & a'_{n+1,2} & \cdots & a'_{n+1,n} & d'_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & D_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & D_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n+1,1} & A_{n+1,2} & \cdots & A_{n+1,n} & D_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\Delta'\Delta^n}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}D_i\prod_{j=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{jk}}},\tag{6}$$

同理

$$\det(h'_{ij})=\frac{\Delta\Delta'^n}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}D'_i\prod_{j=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a^2_{jk}}},\tag{7}$$

从而有

$$\det(h_{ij})\det(h'_{ij})=\frac{(\Delta\Delta')^{n+1}}{\pm\prod_{i=1}^{n+1}D_iD'_i\prod_{j=1}^{n+1}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a^2_{jk}}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a'^2_{jk}}}.\tag{8}$$

证毕.

将(5)代入(8)即得(1).

推论 1 对于$\sum$、$\sum'$,有

$$|\det(h_{ij})\det(h'_{ij})|$$

$$\leqslant\left[\frac{(n+1)^{n-1}\cdot n!^2}{n^n}\right]^{\frac{n+1}{n}}\cdot(VV')^{\frac{n+1}{n}},\tag{9}$$

$$|\det(h_{ij})\det(h'_{ij})|$$

$$\leqslant\left[\frac{(n+1)^{n-3}\cdot(n-1)^2!}{n^n}\right]^{\frac{n+1}{n-1}}\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n+1}v_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1}v'_i\right)\right]^{\frac{n+1}{n-1}},\tag{10}$$

(9)、(10)中的等号当$\sum$、$\sum'$均为正则时成立.

证明 将不等式[7]

$$V \leqslant \sqrt{n+1}\left[\frac{((n-1)!)^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n+1} v_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}}$$

（其等号当单形为正则时成立）和算术–几何平均不等式应用于(1)即得(9)、(10)，且显见(9)、(10)中的等号当$\sum$、$\sum'$均为正则时成立. 证毕.

特别地，当$\sum$与$\sum'$完全重合时，(9)退化为联系同一单形的n维体积V和诸高线长h_i的不等式

$$V \geqslant \frac{1}{n!}\left[\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\right]^{1/2} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} h_i^{\frac{n}{n+1}}, \tag{11}$$

(11)为文献[7]的结果之一.

类似地，可讨论(10)之特例，此略.

如再考虑由 Korchmaros 于 1974 年所证实的关于单形的体积V和诸棱长$\rho_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n+1)$的不等式[8]

$$n!\ V \leqslant \left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{1/2} \cdot \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n+1} \rho_{ij}^{\frac{2}{n+1}}$$

（其等号当单形为正则时成立），应用推论 1 又可得以下结果：

推论 2 对$\sum$、$\sum'$，有

$$|\det(h_{ij})\det(h'_{ij})| \leqslant \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n+1}\left(\prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n+1} \rho_{ij}\rho'_{ij}\right)^{\frac{2}{n}}, \tag{12}$$

等号当$\sum$、$\sum'$均为正则时成立.

对应于推论 1 的特殊情形，这里有

$$\prod_{i=1}^{n+1} h_i \leqslant \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \prod_{1 \leqslant i<j \leqslant n+1} \rho_{ij}^{\frac{2}{n}}. \tag{13}$$

参考文献

[1]Pedoe D., An Inequality for two triangles, Proc. Camb. Phil. Soc., 38 (1942), 397-398.

[2]Pedoe D., Problem E 1562, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 1012.
[3]Pedoe D., Thinking Geometrically, Amer. Math. Monthly, 77(1970), 711－721.
[4] Pedoe D., Inside-outside, the Neuberg-Pedoe Inequality. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 544—576(1976), 95－97.
[5]Carlitz L., An Inequality Involving the Area of Two Triangles, Amer. Math. Monthly, 78(1971), 772.
[6]杨路、张景中，Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广，数学学报，24：3(1981).
[7]张景中、杨路，关于有限质点组的一类几何不等式，中国科技大学学报，11：2(1981).
[8]Korchmaros, G., Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Met. Natur., 56(8);(1974), No. 6, 876－879.

E^n 中的正弦定理及应用*

刘根洪

苏州大学数学系(江苏,215006)

E^n 中的正弦定理

为行文方便,先约定一些记号.并引进单形顶点角的定义.

设 $\mathscr{C}$ 为 E^n 中的 n 维单形,$\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 为 $\mathscr{C}$ 的顶点集.记

$$x^{(j)}=\overrightarrow{P_0P_j}\,(j=1,\cdots,n),$$

$$V=|\det(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})|=\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(n)})^{1/2}$$

表示以 n 个矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$ 为边作出 n 维的平行 $2n$ 面体的体积(或由 $\mathscr{C}$ 的顶点集 $\mathscr{S}=\{P_0,\cdots,P_n\}$ 所支撑的平行多面体的体积),

$$\begin{aligned}V_i&=|\det(x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})|\\&=\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})^{1/2}\end{aligned}$$

表示以 $n-1$ 个矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)}$ 为边作出 $n-1$ 维的平行 $2(n-1)$ 面体的体积(或由顶点集 $\mathscr{S}_i=\{P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$ 所支撑的平行多面体的体积)($i=0,1,\cdots,n$),其中 $\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 是矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 的 Gram 行列式.

---

* 此文发表在《数学研究与评论》1(1989),收稿日期:1986 年 8 月 13 日.收入本书时有删节.

$$v=\frac{1}{n!}V, v_i=\frac{V_i}{(n-1)!}$$

分别表示 n 维单形 $\mathscr{C}$ 和 $n-1$ 维单形 $(P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n)$ 的体积 $(i=0,1,\cdots,n)$，$\rho_{ij}=|\overline{P_iP_j}|$ 表示一维单形 (P_i,P_j) 的棱长，$L(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 表示 E^n 中由矢量 $x^{(1)},\cdots,x^{(m)}$ 所生成的子空间.

关于单形顶点角的概念

定义 设 $\mathscr{C}$ 是 E^n 中的 n 维单形，$\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_n$ 分别是 $\mathscr{C}$ 的 $n+1$ 个界面上的单位法矢量，记 $D_i=\det(\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{i-1},\varepsilon_{i+1},\cdots,\varepsilon_n)$，这时我们称 $a_i=\arcsin|D_i|$ 为 $\mathscr{C}$ 的第 i 个界面所对应的顶点角.

根据单形顶点角的定义，可得下列命题：

命题 设 a_i 为 E^n 中 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的第 i 个界面所对应的顶点角，V 是由顶点集 $\mathscr{S}=\{P_0,\cdots,P_n\}$ 所支撑的平形多面体的体积，V_i 是第 i 个界面的顶点集 $\{P_0,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$ 所支撑的 $n-1$ 维平行多面体的体积，则

$$\sin a_i=V^{n-1}\Big/\prod_{\substack{0\le j\le n\\ j\neq i}}V_j\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

证明 在 E^n 中取定正交坐标系，并设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 分别表示在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 轴方向的单位矢量. 于是 E^n 中向量 $\overline{P_0P_i}=x^{(i)}$ 可唯一表示为

$$x^{(i)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}e_j\ (i=1,2,\cdots,n),a_{ij}\in R.$$

由格拉斯曼(Grassmann)代数可知：

$$x^{(1)}\wedge x^{(2)}\wedge\cdots\wedge x^{(i-1)}\wedge x^{(i+1)}\wedge\cdots\wedge x^{(n)}$$

$$=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_{i-1}<j_{i+1}<\cdots<j_n\le n}\begin{vmatrix}a_{1j_1}&\cdots&a_{1j_{i-1}}&a_{1j_{i+1}}&\cdots&a_{1j_n}\\a_{2j_1}&\cdots&a_{2j_{i-1}}&a_{2j_{i+1}}&\cdots&a_{2j_n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{nj_1}&\cdots&a_{nj_{i-1}}&a_{nj_{i+1}}&\cdots&a_{nj_n}\end{vmatrix}$$

$e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_{i-1}}\wedge e_{j_{i+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}$.

记 A_{ik} 为 $\det(a_{ij})$中元素 a_{ik}的代数余子式$(i,k=1,2,\cdots,n)$,此时可得

$$V_i=|\det(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(i-1)},x^{(i+1)},\cdots,x^{(n)})|$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{n}A_{ij}^2\right)^{1/2}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

再令

$$\varepsilon_i=\overline{x_i}/|\overline{x_i}|,\overline{x_i}=\sum_{j=1}^{n}x_i^je_j,$$

且 $\langle x^{(j)},\overline{x_i}\rangle=0\qquad(j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n)$,

则可解得

$$\varepsilon_i=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}e_k\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2\right)^{1/2}(i=0,1,\cdots,n).$$

得以

$$\sin\alpha_0=|\det(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)|$$
$$=\left(1\Big/\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2\right)^{1/2}\right)\det\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$
$$=V^{n-1}\Big/\prod_{i=1}^{n}V_i.$$

类似地可证得

$$\sin\alpha_i=V^{n-1}\Big/\prod_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}V_j\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

从而命题得证.

由上述命题易得 E^n 中的正弦定理 1.

正弦定理 1 设 V 是 E^n 中 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的顶点集 $\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$所支撑的平行多面体的体积,$V_i$ 为由顶点集 $\mathscr{S}_i=\{P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n\}$所支撑的 $n-1$ 维单形的平行多面体的

体积，α_i 为 $\mathscr{C}$ 的第 i 个界面所对应的顶点角($i=0,1,\cdots,n$)，则

$$\frac{\sin\alpha_0}{V_0}=\frac{\sin\alpha_1}{V_1}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{V_n}=\frac{V^{n-1}}{\prod_{i=0}^{n} V_i}, \tag{1}$$

$$\frac{\sin\alpha_0}{v_0}=\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\cdots=\frac{\sin\alpha_n}{v_n}=\frac{(nv)^{n-1}}{(n-1)!\ \prod_{i=0}^{n} v_i}, \tag{1'}$$

正弦定理 2　设 $\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$ 为 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的顶点集，θ_{ij} 是 $\mathscr{C}$ 的两个 $n-1$ 维单形($P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n$)，($P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{j+1},\cdots,P_n$)所成之角. 又设 β_{0i} 是 $n-1$ 维单形($P_0,P_1,\cdots,P_{i-1},P_{i+1},\cdots,P_n$)的第 i 个界面所对应的顶点角($i=1,2,\cdots,n$)，则

$$\frac{\sin\beta_{0n}}{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-1}}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-2}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-2}}\sin\theta_{ij}}=\cdots=\frac{\sin\beta_{01}}{\prod\limits_{2\le i<j\le n}\sin\theta_{ij}}. \tag{2}$$

为证明定理 2，需要下面两个引理：

引理 1　设($x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x$)为 E^n 中的 $m+1$ 维单形，y 是子空间 $L(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 的任一矢量，再由矢量 x 的末端 P 向 $L(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})$ 作正投影，其高长和垂足依次记为 h、N.
则

$$h^2=\langle\overline{NP},\overline{NP}\rangle=\frac{\Gamma(x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(m)},x)}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})},$$

且斜高 $|x-y|\geqslant h$.

引理 2　设两个 m 维单形($P_0,\cdots,P_{m-1},P_m$)与($P_0,\cdots,P_{m-1},P_{m+1}$)的交角为 θ，而 $m\leqslant n-1$，则

$$\sin\theta=\frac{(x^{(1)},\cdots,x^{(m)},x^{(m+1)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)})^{1/2}}{\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m)})^{1/2}\cdot\Gamma(x^{(1)},\cdots,x^{(m-1)},x^{(m+1)})^{1/2}}.$$

图 1 给出了在 E^3 中求三维单形(P_0,P_1,P_2,P_3)中的两个二维单形(P_0,P_1,P_2)与(P_0,P_1,P_3)间交角 θ 的示意图.

现回到定理 2 的证明.

应用定理 1 和引理 2 可得下列 n 个等式：

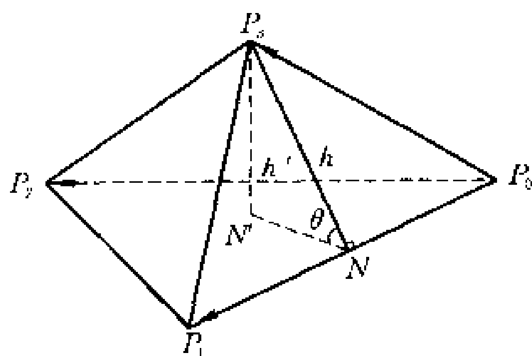


图 1

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0n}\prod_{j=1}^{n-1}\sin\theta_{jn},$$

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0,n-1}\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_{j,n-1},$$

……

$$\sin\alpha_0=\sin\beta_{0,1}\prod_{j=1}^{n}\sin\theta_{j,1}.$$

从上面 n 个等式，便可得 E^n 中的球面三角正弦定理：

$$\frac{\sin\beta_{0n}}{\prod\limits_{1\le i<j\le n-1}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-1}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-1}}\sin\theta_{ij}}=\frac{\sin\beta_{0,n-2}}{\prod\limits_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne n-2}}\sin\theta_{ij}}=\cdots=\frac{\sin\beta_{01}}{\prod\limits_{2\le i<j\le n}\sin\theta_{ij}}.$$

作为定理 2 的特殊情况，当 $n=3$ 时，对于四面体 $P_0P_1P_2P_3$，则有

$$\frac{\sin\beta_{03}}{\sin\theta_{12}}=\frac{\sin\beta_{02}}{\sin\theta_{13}}=\frac{\sin\beta_{01}}{\sin\theta_{23}}.$$

这就是通常球面三角中的正弦定理. 这里 $\theta_{12},\theta_{13},\theta_{23}$ 分别是平面 $P_0P_1P_3,P_0P_2P_3$；$P_0P_1P_2,P_0P_2P_3$；$P_0P_1P_2,P_0P_1P_3$ 间的交角. 而

$\beta_{03}=\angle P_1P_0P_2,\beta_{02}=\angle P_1P_0P_3,\beta_{01}=\angle P_2P_0P_3$（见图 1).

E^n 中正弦定理 1 的应用

为阐明定理 1 的应用，需用到下述重要命题，称它为正弦性质定理.

正弦性质定理 在定理 1 的假设条件下，有

$$\sum_{i=0}^{n}\sin^2\alpha_i\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^n. \tag{3}$$

证明 欲证(3)式成立，只需证明不等式：

$$\sum_{i=0}^{n} v_i^2 \Big/ \prod_{i=0}^{n} v_i^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{(n-1)!^2}{(nv)^{2(n-1)}}$$

成立即可.

设 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的顶点集为 $\mathscr{S}=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，顶点 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 赋予的质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_{n+1}$. 今任取 $\mathscr{S}$ 中的 $k+1$ 个顶点 $P_{i0},P_{i1},\cdots,P_{ik}$. 将其所支撑的 k 维单形的体积记为 $v_{i_0i_1\cdots i_k}$，再令

$$M_k=\sum\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_k}\cdots\sum m_{i_0}m_{i_1}\cdots m_{i_k}v_{i_0i_1\cdots i_k}^2 \quad (1\leqslant k\leqslant n),$$

$$M_0=\sum_{i=1}^{n+1} m_i \quad (m_i>0),$$

则有

$$\frac{M_k^l}{M_l^m}\geqslant\frac{[(n-l)!\ (l!)^3]^k}{[(n-k)!\ (k!)^3]^l}(n!\ M_0)^{l-k}(1\leqslant k<l\leqslant n),$$

等号当且仅当 $\mathscr{S}$ 的密集椭球为球时成立(参见文献[3]).

今在上式中取 $k=n-1, l=n, m_1=v_0^2, m_2=v_1^2, \cdots, m_{n+1}=v_n^2$，则有

$$\frac{\left(\sum_{i=0}^{n} v_{i_0}^2 v_{i_1}^2\cdots v_{i_{n-1}}^2\cdot v_i^2\right)^n}{(v_0^2\cdot v_1^2\cdots v_n^2\cdot v^2)^{n-1}}\geqslant\frac{(n!^3)^{n-1}}{[(n-1)!^3]^n}\left(n!\ \sum_{i=0}^{n} v_i^2\right).$$

不妨设 $v_{ij}\neq v_i (0\leqslant j\leqslant n-1)$，则上式也就是

$$\left[(n+1)\prod_{i=0}^{n} v_i^2\right]^n\Big/\left[\prod_{i=0}^{n} v_i^2 v^2\right]^{n-1}\geqslant\frac{n^{3n-2}}{(n-1)!^2}\left(\sum_{i=0}^{n} v_i^2\right),$$

即
$$\prod^{n} v_i^2/v^{2(n-1)}\geqslant\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n^{2(n-1)}}{(n-1)!^2}\left(\sum_{i=0}^{n} v_i^2\right).$$

从而得

$$\sum^{n} v_i^2\Big/\prod_{i=0}^{n} v_i^2\leqslant\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{(n-1)!^2}{(nv)^{2(n-1)}}.$$

由正弦定理及正弦性质定理可得以下推论：

推论 1　设 $S(n)$ 是 E^n 中所有 n 维单形所成之集，一单形 $\mathscr{C}$ 的体积和它的 $n+1$ 个 $n-1$ 维单形的体积分别用 $v(\mathscr{C})$，$v_i(\mathscr{C})$ 表示，顶点角用 $a_i(\mathscr{C})$ 表示，则有

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sin^2 a_i = e$$

推论 2　设 v 和 $v_i(i=0,1,\cdots,n)$ 依次是 n 维单形 $\mathscr{C}$ 的体积及 $n-1$ 维单形的体积，则

$$v\leqslant\sqrt{1+n}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{1/[2(n-1)]}\left(\prod_{i=0}^{n}v_i\right)^{n/[(n^2-1)]} \tag{4}$$

参考文献

[1]Blumenthal, L. M., Theory and Applications of Distance Geometry, Znd ed, New York, 1970.

[2]杨路、张景中，数学学报，23(1980)，No. 5，740—749.

[3]杨路、张景中，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，Vol. 11，No. 2(1982)，1 -8.

[4]Korchmaros, C., Atti Accai. Naz. Lincci Rend. cl. sci. Fis. Mat. Natur.，(8)56(1974)，No. 6，876—879.

[5]Dörband, W., Determinantensätze and Simplexeigenschaften. Math. Nachr.，44(1970)，295—304.

[6]Pedoe, D.，Amer. Math. Monthly, 77(1970)，711—721.

[7]陈瑞琛，扬州师范学院自然科学报，1(1984)，23-- 26.

[8]刘根洪，数学的实践与认识. 4(1986). 38—43.

[9]华罗庚，高等数学引论. 科学出版社(1984).

[10]Г. E. 希洛夫，线性空间引论(1957)，178 -179.

评注：单形顶点角的正弦定理最早由 P. Bortoš 所建立，本文用另一方法证明了这一定理. 单形顶点角的不等式(3)最早由蒋星耀所建立[55]，这里给出了一种简单证明.

关于 K 级顶点角的正弦定理及应用*

冷岗松

湖南教育学院数学系(长沙,410012)

1968 年,P. Bartoš引进了 n 维单形顶点角的概念:

设 Ω 是 E^n 中的 n 维单形,$\bar{e}_0,\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 依次是 Ω 的 $n+1$ 个界面上的单位法向量,令

$$D_i=\det(\bar{e}_0,\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_{i-1},\bar{e}_{i+1},\cdots,e_n),$$

则把 $\theta_i=\arcsin|D_i|$ 定义为此单形的第 i 个界面对应的顶点角. 从这个定义出发,Bartoš建立了 n 维单形的正弦定理:

设 V 表示 n 维单形 Ω 的体积,V_i 表示 Ω 的第 i 个界面的 $n-1$ 维体积,则

$$\frac{V_i}{\sin\theta_i}=\lambda=\frac{(n-1)!\prod_{i=0}^{n}V_i}{(nV)^{n-1}}\quad(i=0,1,\cdots,n).\tag{1}$$

后来,Eriksson 和刘根洪在[2]、[3]中又分别用不同的方法证明了 Bartoš的正弦定理(1). 从 Bartoš正弦定理出发,蒋星耀在[4]中证明了一个有趣的不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2\theta_i\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\tag{2}$$

---

* 本文发表在《数学杂志》3(1993),收稿日期:1990 年 10 月 12 日.

本文给出 k 级顶点角的概念，建立关于 k 级顶点角的正弦定理. 这个结论是 Bartoš正弦定理的推广. 作为应用，我们建立了关于二面角的正弦定理；推导出两个单形相似的一个充要条件；最后推广了不等式(2).

1. K 级顶点角的概念

设 E^n 中的 n 维单形 Ω，顶点集为 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，$\bar{e}_0,\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_n$ 依次是顶点 $P_0,P_1,\cdots,P_n$ 所对应的 $n+1$ 个界面上的单位法向量，任取其中 k 个向量 $\bar{e}_{i_1},\bar{e}_{i_2},\cdots,\bar{e}_{i_k}$，设个 k 个向量的 Gram 行列式为 D_k，则角

$$\theta_{i_1i_2\cdots i_k}=\arcsin\sqrt{D_k}$$

叫做由顶点 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_k}$ 所确定的 k 级顶点角. 有时，我们还把 $\theta_{i_1i_2\cdots i_k}$ 叫做以 $\tau/\{P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_k}\}$ 为顶点集的 $n-k$ 维单形所对应的 k 级顶点角.

易见，Bartoš所定义的顶点角概念是上面 k 级顶点角概念的一个特例，即 $k=n$ 时的 n 级顶点角.

2. K 级正弦定理

定理 1 设 n 维单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，$P_i$ 所对应的 $n-1$ 维界面的体积为 V_i，Ω 的体积为 V，任意给定的 k 级顶点角 $\theta_{i_1i_2\cdots i_k}$ 所对应的 $n-k$ 维单形的体积为 $V_{j_0j_1\cdots j_{n-k}}$，则

$$\frac{V_{j_0}\cdot V_{j_1}\cdots V_{j_{n-k}}\cdot V_{j_0j_1\cdots j_{n-k}}}{\sin\theta_{i_1i_2\cdots i_k}}=\lambda_k=\frac{(n-1)!\ \prod_{i=0}^{n}V_i}{(n-K)!\ (nV)^{k-1}}. \tag{3}$$

其中 $j_0<j_1<\cdots<j_{n-k}$ 和 $i_1<i_2<\cdots<i_k$ 构成指标 $0,1,2,\cdots n$ 的一个全组.

我们可简称定理 1 为 k 级正弦定理. 取 $k=n$，则得 Bartoš正弦定理.

3. 应用

定理 2(关于二面角的正弦定理)　设单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，任意两顶点 P_i,P_j 所对应的两个 $n-1$ 维界面所成的二面角为 θ_{ij}，顶点集 $\tau/\{P_i,P_j\}$ 所支撑的 $n-2$ 维单形的体积为 $V_{\tau/\{P_iP_j\}}$，则

$$\frac{V_{\tau/\{P_iP_j\}}}{V_iV_j\sin\theta_{ij}}=\frac{n-1}{nV}.$$

定理 3　设单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，单形 Ω' 的顶点集 $\tau'=\{P'_0,P'_1,\cdots,P_n\}$，且顶点集 τ 和 τ' 的绕向相同，则 Ω 与 Ω' 相似的充要条件是对任意的 i,j，有

$$\frac{V\cdot V_{\tau'\{P_i,P_j\}}}{V'\cdot V'_{\tau'/P_i,P_j'}}=\frac{V_iV_j}{V'_iV'_j}.$$

定理 4　设 n 维单形 Ω 的顶点集 $\tau=\{P_0,P_1,\cdots,P_n\}$，任意的 k 个顶点 $P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_k}$ 所确定的 k 级顶点角为 $\theta_{i_1i_2\cdots i_k}(k\leqslant n-1)$，顶点集 $\tau/\{P_i\}$ 确定的 n 级顶点角仍记为 θ_i，则

$$\frac{\left(\sum\limits_{0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}\sin^2\theta_{i_1i_2\cdots i_k}\right)^n}{\left(\sum\limits_{i=0}^{n}\sin^2\theta_i\right)^k}\geqslant\left\{\binom{n}{k}\right\}^n. \tag{4}$$

等号当且仅当单形 Ω 为正则单形时成立.

在定理 4 中取 $k=1$，则得不等式(2)，因此不等式(4)是(2)的一个推广.

参考文献

[1]Bartoš. P. saspois Pest Mat, 93(1968), 273—277.

[2]Eriksson, F. Geometriac dedicate, 7(1978), 71 -80.

[3]刘根洪，E^n 中的正弦定理及应用，数学研究与评论，9(1989)，45 -52.

[4]蒋星耀，数学年刊 8A，6(1987)，668— 670.

[5]杨路、张景中，数学学报 23，5(1980)，742—749.

[6]张景中、杨路，中国科大学报 11，2(1981)，1- -8.

关于 N 维单形的一类不等式*

林祖成

湖北黄石市有色一中(435005)

在 N 维欧氏空间 E^N 的距离几何研究中，人们得到了许多联系 N 维单形的棱长、体积、宽度的几何不等式，但联系着单形中有关元素的长度之比的不等式并不多见．本文将建立这样一类不等式．

定理 设 N 维单形 $A_1A_2\cdots A_{N+1}$ 的顶点 A_i 所对的面的高为 h_i，该面外的旁切球半径为 r_i，则有

$$\sum_{i=1}^{N+1}\frac{h_i}{r_i}\geqslant(N+1)(N-1),$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant N-1}\frac{h_{i_1}h_{i_2}}{r_{i_1}r_{i_2}}\geqslant C_{N+1}^2(N-1)^2,$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant N+1}\frac{h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_N}}{r_{i_1}r_{i_2}\cdots r_{i_N}}\geqslant C_{N-1}^N(N-1)^N.$$

等号当且仅当 N 维单形 $A_1A_2\cdots A_{N+1}$ 的各侧面的面积相等时成立．

证明定理时，需要作如下预备工作：

---

* 本文发表在《数学的实践与认识》2(1994)，收入本书时有删节．

引理 设 N 维单形 $A_1A_2\cdots A_{N+1}$ 的体积为 V.顶点 A_i 所对的面的面积为 S_i,该面外的旁切球半径为 r_i,则有

$$r_i=\frac{NV}{\sum\limits_{j=1}^{N+1}S_j-2S_i}.\tag{1}$$

引理的证明只要仿照文[6]中附录 1 的方法就不难获证.这里略去其平凡的叙述.在证明定理时,为了方便起见,我们还引入如下记号:

$$A_1=\prod_{i=1}^{N+1}S_i;$$

$$A_2=\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant N+1}S_{i_1}S_{i_2};$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$A_{N+1}=\prod_{i=1}^{N+1}S_i.$$

在证定理时,我们只证定理中前三个不等式,其他的不等式可由本文的方法类似地获得证明.

证明 先证

$$\sum_{i=1}^{N+1}\frac{h_i}{r_i}\geqslant(N+1)(N-1).\tag{2}$$

易知

$$h_i=NV/S_i,\tag{3}$$

由(1)、(3),知

$$\frac{h_i}{r_i}=\frac{A_1-2S_i}{S_i}=\frac{A_1}{S_i}-2.\tag{4}$$

于是(2)等价于

$$\sum_{i=1}^{N+1}\frac{A_1}{S_i}\geqslant(N+1)^2.\tag{5}$$

又知

$$\left(\sum_{i=1}^{N+1}\frac{A_i}{S_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{N+1}\frac{S_i}{A_i}\right)\geqslant(N+1)^2, \tag{6}$$

且

$$\sum_{i=1}^{N+1}\frac{S_i}{A_i}=1. \tag{7}$$

由(6)、(7)知(5)成立,从而(2)成立,且从过程中知:等号成立的条件如定理中所述.类似地可证明其它几个不等式.

关于单形的一个猜想及两个不等式*

郭曙光

盐城师范专科学校数学系(江苏,224002)

设 $A_0A_1\cdots A_n$ 为 n 维欧氏空间 E^n 中的一个单形 S,它的重心为 G,A_iG 交 A_i 的对面于 G_i(G_i 为 $n-1$ 维单形 $A_0A_1\cdots A_{i-1}A_{i+1}\cdots A_n$ 的重心),交 S 的外接球面 F 于 A'_i($i=0,1,\cdots,n$).

记 S 的棱长分别为 $a_{ij}=\overline{A_iA_j}$($i,j=0,1,\cdots,n,i\neq j$),它的中线长为 $m_i=\overline{A_iG_i}$($i=0,1,\cdots,n$),S 的第 i 个面为 $n-1$ 维单形 $A_0A_1\cdots A_{i-1}A_{i+1}\cdots A_n$,记为 f_i,它的 $n-1$ 维体积为 S_i($i=0,1,\cdots,n$),$\langle i,j\rangle$ 表示面 f_i 和 f_j 所成的内二面角.

本文证明了苏化明在[1](数学季刊 4(1))中提出的猜想是正确的,得到下面的定理 1,同时还得到了与其相关的定理 2 和定理 3.

定理 1

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\overline{G_iA'_i}}{\overline{A_iG_i}}\geqslant n-1. \tag{1}$$

定理 2

---

* 本文发表在《扬州师院学报》4(1992),收稿日期:1992 年 7 月 14 日.收入本书时有删节.

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{A_i G_i}}{\overline{A_i A'_i}} \leqslant \frac{(n+1)^2}{2n}. \tag{2}$$

定理 3

$$\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} \cos^2 \langle i, j \rangle \geqslant \frac{n+1}{2n}. \tag{3}$$

其中(1)和(2)当且仅当单形 S 的所有中线长相等时等号成立，(3)当且仅当单形 S 的所有内二面角相等时等号成立.

度量和与 Alexander 对称化*

杨　路　张景中

中国科学院成都分院数理科学研究室(610041)

近期 R. Alexander 在度量几何研究中提出了度量和与对称化的基本概念.本文作了进一步工作,建立了度量和与对称化不增高空间维数的一个充要条件;并举例说明其应用.

§1　引　　言

Alexander[1,2,3]建议在度量几何中应用度量加或度量平均的方法.他特别指出,这一方法与 Sallee[4]的"弦的伸展定理"相结合,用以解决某些几何极值问题是卓有成效的.

设欧氏空间中有 m 个点列,每个点列的项数均为 N:

$$\mathfrak{G}_k=\{\boldsymbol{r}_1^k,\boldsymbol{r}_2^k,\cdots,\boldsymbol{r}_N^k\},k=1,2,\cdots,m, \tag{1.1}$$

如果能找到一个点列 $\mathfrak{G}=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N\}$,使

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2=\sum_{k=1}^{m}|\boldsymbol{r}_i^k-\boldsymbol{r}_j^k|^2 \tag{1.2}$$

对 $i,j=1,2,\cdots,N$ 都成立,我们就说点列 $\mathfrak{G}$ 是这组点列$\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,$

---

* 本文发表在《数学年刊》8A:2(1987),收稿日期:1984 年 4 月 10 日(初稿),1985 年 5 月 11 日(修改稿).

$\cdots,\mathfrak{G}_m\}$的"度量和",记为

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_m. \tag{1.3}$$

显然,满足条件(1.2)的 $\mathfrak{G}$ 不是唯一的,而是组成一个合同类,类中的每一个点列都是$\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,\cdots,\mathfrak{G}_m\}$的度量和.

并且,我们又把满足条件

$$|\bar{\boldsymbol{r}}_i-\bar{\boldsymbol{r}}_j|^2=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}|\boldsymbol{r}_i^k-\boldsymbol{r}_j^k|^2 \tag{1.4}$$

的点列 $\overline{\mathfrak{G}}=\{\bar{\boldsymbol{r}}_1,\bar{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{r}}_N\}$ 叫做这组点列$\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,\cdots,\mathfrak{G}_m\}$的"度量平均",记为

$$\overline{\mathfrak{G}}=\frac{1}{m}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_m). \tag{1.5}$$

进一步考虑连续型度量和或度量平均.设

$$\mathfrak{G}(t)=\{\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\cdots,\boldsymbol{r}_N(t)\},\alpha<t<\beta \tag{1.6}$$

是由点列构成的单参数族.如果在 Hilbert 空间 l^2 中能找到一个点列 $\mathfrak{G}=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N\}$使得

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2=\int_\alpha^\beta|\boldsymbol{r}_i(t)-\boldsymbol{r}_j(t)|^2dt \tag{1.7}$$

对 $i,j=1,2,\cdots,N$ 都成立,我们就说点列 $\mathfrak{G}$ 是点列族$\{\mathfrak{G}(t)|\alpha<t<\beta\}$的度量和,记为

$$\mathfrak{G}=\int_\alpha^\beta\mathfrak{G}(t)dt. \tag{1.8}$$

类似地,把满足条件

$$|\bar{\boldsymbol{r}}_i-\bar{\boldsymbol{r}}_j|^2=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta|\boldsymbol{r}_i(t)-\boldsymbol{r}_j(t)|^2dt \tag{1.9}$$

的点列 $\overline{\mathfrak{G}}=\{\bar{\boldsymbol{r}}_1,\bar{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{r}}_N\}$叫做$\{\mathfrak{G}(t)|\alpha<t<\beta\}$的度量平均,记为

$$\overline{\mathfrak{G}}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\mathfrak{G}(t)dt. \tag{1.10}$$

下列事实是已知的[1,3]:对于欧氏空间中任给的一族项数相同的点列,它们的度量和或度量平均一定在有限维或无穷维的欧氏

空间(后者指 Hilbert 空间)中存在.

一个相当重要然而尚未解决的问题是:如果所给的一族点列每一个都在 E^n 内,什么条件能够保证它们的度量和也在 E^n 中?粗略言之,度量和不增高空间维数的条件是什么?

Alexander 的文章提醒我们去注意这一问题.事实上,如果度量和不增高空间维数,则往往难于直接应用 Sallee 的弦伸展定理来达到所要的目的.在[3]中正好遇上了这样的困难,以致妨碍了这方法的进一步运用.

本文将针对这一问题,给出度量和不增高空间维数的一个充要条件,即文中定理 1(离散型)和定理 4(连续型).并据此建立了所谓"对称化"(定义见后文)维数不增高的条件;应用此条件对 Johnson 的一个猜想给出了证明.

§2 作为预备工具的离散模型

记号 conv$\mathfrak{G}$ 表示点列 $\mathfrak{G}$ 的凸包,这凸包的维数 $\dim(\text{conv}\mathfrak{G})$ 当然也就是 $\mathfrak{G}$ 所占有的欧氏空间的维数.

定理 1 设 $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_m$,令

$$n=\max_k\{\dim(\text{conv}\mathfrak{G}_k)\},\tag{2.1}$$

并设每个点列 $\mathfrak{G}_k\subset E^n(k=1,2,\cdots,m)$的第一点都落在原点,则 $\dim(\text{conv}\mathfrak{G})=n$ 的充要条件是:存在一个 $\mathfrak{G}_{k_0}\in\{\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2,\cdots,\mathfrak{G}_m\}$ 和一组线性映射 $L_k:E^n\to E^n$ 使得

$$L_k(\mathfrak{G}_{k_0})=\mathfrak{G}_k,k=1,2,\cdots,m.\tag{2.2}$$

将关系(2.2)表述得详细些就是:如果设 $\mathfrak{G}_k=\{\boldsymbol{r}_1^k,\boldsymbol{r}_2^k,\cdots,\boldsymbol{r}_N^k\}$,则有

$$L_k(\boldsymbol{r}_i^{k_0})=\boldsymbol{r}_i^k,i=1,2,\cdots,N,k=1,2,\cdots,m.\tag{2.3}$$

证明 充分性.设

$$r_i^k = (x_{i1}^k x_{i2}^k \cdots x_{in}^k)^\tau \quad (\tau\text{ 表转置}),\tag{2.4}$$

并令

$$Q_k = (r_1^k r_2^k \cdots r_N^k),\ k=1,2,\cdots,m,\tag{2.5}$$

均表示相应的 $n\times N$ 矩阵. 又 Q_k 的行向量可记为

$$V_l^k = (x_{1l}^k x_{2l}^k \cdots x_{Nl}^k),\ l=1,2,\cdots,n.\tag{2.6}$$

条件(2.2)或(2.3)相当于,对每个 $k=1,2,\cdots,m$ 存在着 $n\times n$ 实矩阵 M_k 使得

$$M_k Q_{k_0} = Q_k.\tag{2.7}$$

由(2.1)知道*

$$\max_k\{\text{rank}(Q_k)\}=n.\tag{2.8}$$

由(2.7)和(2.8)必须有

$$\text{rank}(Q_{k_0})=n.\tag{2.9}$$

现在令

$$r_i^* = (x_{i1}^1 \cdots x_{in}^1 x_{i1}^2 \cdots x_{in}^2 \cdots x_{i1}^m \cdots x_{in}^m)^\tau,\tag{2.10}$$

每个 r_i^* 可视为空间 E^{mn} 中的一个点,这样构成的点列

$$\mathfrak{G}^* = \{r_1^*, r_2^*, \cdots, r_N^*\}\tag{2.11}$$

当然含有原点($r_1^* = O$),并易验证满足条件

$$|r_i^* - r_j^*|^2 = \sum_{k=1}^m |r_i^k - r_j^k|^2,$$

即

$$\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \cdots + \mathfrak{G}_m.\tag{2.12}$$

又令

$$Q = (r_1^* r_2^* \cdots r_N^*)\tag{2.13}$$

表示相应的 $N\times mn$ 矩阵. 显然,Q 的全部行向量就是前面(2.6)所定义的 V_l^k.

根据(2.7),Q_k 的每一行向量都可以表为 Q_{k_0} 的行向量的线性

---

* 因 $\mathfrak{G}_k$ 含有原点,它占有空间的维数应等于它的秩.

组合；即每一个 V_l^k 都可以表示为 $V_1^{k_0}, V_2^{k_0}, \cdots, V_n^{k_0}$ 的线性组合. 于是

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) - \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_{k_0}) = n,$$

而*

$$\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}^*) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) = n.$$

必要性. 由(2.1)可知在诸 $\mathfrak{G}_k$ 中至少有一个占据空间的维数是 n，不妨设其为 $\mathfrak{G}_{k_0}$，即

$$\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}_{k_0}) = n. \tag{2.14}$$

然后仍按(2.4)、(2.10)、(2.13)作出矩阵 $\boldsymbol{Q}$. 由假设 $\mathfrak{G}^*$ 占据空间维数不超过 n，故有

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}) = n. \tag{2.15}$$

这样 $\boldsymbol{Q}$ 的全部行向量 $V_l^k(k=1,2,\cdots,m; l=1,2,\cdots,n)$ 的最大无关组只包括 n 个向量；根据(2.14)，我们可以取 $V_l^{k_0}(l=1,2,\cdots,n)$ 作为这样一个极大线性无关组. 其余的 V_l^k 都可以通过它们线性表出；这等价于存在线性映射 $L_k: E^n \to E^n$ 使得 $L_k(\mathfrak{G}_{k_0}) = \mathfrak{G}_k$.

证毕.

系 1 将定理 1 叙述中之度量和代之以度量平均，全部结论仍然成立.

系 2 设 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}_k) = n (k=1,2,\cdots,m)$，即每个 $\mathfrak{G}_k$ 都占有 n 维空间，则其度量和（或度量平均）也占有 n 维空间的充要条件是：所有 $\mathfrak{G}_k$ 属于同一个仿射类. 详细地说：存在一系列仿射变换 $A_{hk}, E^n \to E^n$ 使得

$$A_{hk}(\boldsymbol{r}_i^h) = \boldsymbol{r}_i^k; i=1,2,\cdots,N; h,k=1,2,\cdots,m. \tag{2.16}$$

系 3 如果所有 $\mathfrak{G}_k(k=1,2,\cdots,m)$ 属于同一个仿射类，则其度量和 $\mathfrak{G}$ 及度量平均也都属于这个仿射类.

证明 设 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}_k) = n \quad (k=1,2,\cdots,m)$. 由诸 $\mathfrak{G}_k$ 之仿

---

* 因 $\mathfrak{G}^*$ 含有原点，它占有空间的维数应等于它的秩.

射等价性按系 2 有

$$\dim(\operatorname{conv}\mathfrak{G})=n$$

于是

$$\dim(\operatorname{conv}(\mathfrak{G}+\mathfrak{G}))=n. \tag{2.17}$$

(因为 $\mathfrak{G}+\mathfrak{G}$ 显然相似对应于 $\mathfrak{G}$,故占有相同维数空间). 而(2.17)可写为

$$\dim(\operatorname{conv}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_m+\mathfrak{G}))=n. \tag{2.18}$$

这说明度量和 $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_m+\mathfrak{G}$ 不增高空间维数. 由系 2 知 $\mathfrak{G}$ 应与所有 $\mathfrak{G}_k$ 属于同一仿射类. 至于 $\overline{\mathfrak{G}}$,它显然是同 $\mathfrak{G}$ 相似对应的.

证毕.

定义 将一个多角形用它的顶点按邻接次序构成的点列 $\mathfrak{G}_1=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N\}$来表示,然后另外构造 $N-1$ 个点列如下:

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{G}_2=\{\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\cdots,\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{r}_1\},\\&\mathfrak{G}_3=\{\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4,\cdots,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\},\\&\cdots\cdots\\&\mathfrak{G}_N=\{\boldsymbol{r}_N,\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_{N-2},\boldsymbol{r}_{N-1}\}.\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

我们将这些 $\mathfrak{G}_k(k=1,2,\cdots,N)$的度量平均

$$\overline{\mathfrak{G}}=\frac{1}{N}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\cdots+\mathfrak{G}_N)$$

所表示的多角形叫做是原多角形的“对称化”(为了与 Steiner 对称化相区别,可以将此处的对称化称为 Alexander 对称化).

在不致引起混淆时,可以对点列及其代表的多角形用相同记号表示,就说多角形 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是多角形 $\mathfrak{G}_1$ 的对称化.

定理 2 设 $\mathfrak{G}_1$ 是一个多角形*,$\overline{\mathfrak{G}}$ 是它的对称化. $\overline{\mathfrak{G}}$ 为平面多

* 这里,不考虑那种全部顶点在一直线上的退化多角形.

角形的充要条件是:$\mathfrak{G}_1$ 是一个仿射正多角形.

证明 充分性. $\mathfrak{G}_1$ 是一个仿射正多角形,显而易见 $\mathfrak{G}_1$ 与(2.19)中的任何一个 $\mathfrak{G}_k$ 都是仿射等价的. 由系 1(或系 2)知 $\overline{\mathfrak{G}}$ 与 $\mathfrak{G}_1$ 应占有同维数空间,即 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是平面多角形.

必要性. 如果 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是平面多角形. 因为度量平均不能降低空间维数,$\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}_1)\leqslant\dim(\mathrm{conv}\overline{\mathfrak{G}})$;又据约定 $\mathfrak{G}_1$ 不是那种全部顶点在一直线上的多角形,故有 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}_1)\geqq 2$. 于是由系 2 和系 3,$\overline{\mathfrak{G}}$ 和所有 $\mathfrak{G}_k$ 均属于同一个仿射类.

令 $\overline{\mathfrak{G}}=\{\bar{\boldsymbol{r}}_1,\bar{\boldsymbol{r}}_2,\cdots,\bar{\boldsymbol{r}}_N\}$,由于 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是 $\mathfrak{G}_1$ 的对称化,由(2.19)不难验证

$$|\bar{\boldsymbol{r}}_i-\bar{\boldsymbol{r}}_j|=|\bar{\boldsymbol{r}}_{i-p}-\bar{\boldsymbol{r}}_{j+p}|, \tag{2.20}$$

如果令 $\bar{\boldsymbol{r}}_{i-N}=\bar{\boldsymbol{r}}_i$,这等式对一切自然数 p 成立. 这说明 $\overline{\mathfrak{G}}$ 的对称群包含了一个 N 阶循环群作为子群:对于一个平面 N 角形来讲,这恰好是它成为正多角形的条件.

即然 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是正多角形,与之仿射对应的 $\overline{\mathfrak{G}}_1$ 当然就是仿射正多角形了.

证毕.

将此结果应用于等边多角形可以得到

定理 3 设 $\mathfrak{G}_1$ 是一个等边多角形(边数大于 4),$\overline{\mathfrak{G}}$ 是它的对称化. $\overline{\mathfrak{G}}$ 为一平面多角形的充要条件是:$\mathfrak{G}_1$ 是一个平面正多角形.

证明 不妨设 $\mathfrak{G}_1$ 的各边长皆为 1,即

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i+1}|=1, i=1,2,\cdots,N. \tag{2.21}$$

由定理 2 已经知道,$\overline{\mathfrak{G}}$ 为平面多角形的充要条件是 $\mathfrak{G}_1$ 为仿射正多角形;为证明本定理,只须证明边数大于 4 的等边仿射正多角形一定是平面正多角形就够了.

现在设 $\mathfrak{G}_1$ 是一个仿射正多角形(自然是平面凸多角形). 令 θ_i 表示顶点在 $\boldsymbol{r}_i$ 的 $\mathfrak{G}_1$ 的内角;又令 Δ_i 表示三角形 $\boldsymbol{r}_{i-1}\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{r}_{i+1}$ 的面积. 则因 $\mathfrak{G}_1$ 是仿射正多角形而有

$$\Delta_1=\Delta_2=\cdots=\Delta_N. \tag{2.22}$$

再结合(2.21)就得到

$$\sin\theta_1=\sin\theta_2=\cdots=\sin\theta_N. \tag{2.23}$$

这说明 $\mathfrak{G}_1$ 的所有内角至多能取某两个值,不妨令其为 θ 和 $\pi-\theta$.

如果 $\mathfrak{G}_1$ 的所有内角相等,据题设它又是等边的,当然就是正多角形,定理已得证.

如果 $\mathfrak{G}_1$ 的内角确实取得了两个不同的值 θ 和 $\pi-\theta$ $\left(设\ \theta>\dfrac{\pi}{2}\right)$,不妨设 $\theta_2=\theta,\theta_3=\pi-\theta$,这时 $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_4$ 组成一个菱形. 至于 θ_4,有两种可能取值:或是 $\theta_4=\theta$,这时 $\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_4\boldsymbol{r}_5$ 也组成菱形,故 $\boldsymbol{r}_5$ 重合于 $\boldsymbol{r}_1$,即 $\mathfrak{G}_1$ 的边数为 4,与题设矛盾;或是 $\theta_4=\pi-\theta<\theta$,这时 $\mathfrak{G}_1$ 的一边 $\boldsymbol{r}_4\boldsymbol{r}_5$ 进入菱形 $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_3\boldsymbol{r}_4$ 内部,与 $\mathfrak{G}_1$ 的凸性矛盾.

证毕.

下面将举例说明,如何应用本节所述的几个离散型的定理来处理某些离散型的几何极值问题. 为此还将引用 Sallee 的一个近期结果:

定理 S(G. T. Sallee[4]) 设 $\mathfrak{G}=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N\}$ 是一个多角形. 如果 $\mathfrak{G}$ 不是一个平面多角形,则必存在一个平面凸多角形 $\mathfrak{G}^*=\{\boldsymbol{r}_1^*,\boldsymbol{r}_2^*,\cdots,\boldsymbol{r}_N^*\}$,使得

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i+1}|=|\boldsymbol{r}_i^*-\boldsymbol{r}_{i+1}^*|,$$

并且

$$|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|<|\boldsymbol{r}_i^*-\boldsymbol{r}_j^*| \tag{2.24}$$

对一切 $|i-j|\neq 0,1\pmod N$ 的 i,j 成立.

例 1 将多角形 $\mathfrak{G}$ 的顶点 $\boldsymbol{r}_i$ 和 $\boldsymbol{r}_{i+p}$ 决定的对角线叫做"跨度

为 p 之对角线". 将 $\mathfrak{G}$ 的所有跨度为 p 的对角线的平方和记为 $\sum_p(\mathfrak{G})$，即

$$\left.\begin{aligned}\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}) &= \sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i-p}|^2,\ 1\leqslant p<\frac{N}{2};\\ \sum\nolimits_p(\mathfrak{G}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_{i+p}|^2,\ p=\frac{N}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

求证 比值 $\sum_p(\mathfrak{G})\Big/\sum_1(\mathfrak{G})$ 当且仅当 $\mathfrak{G}$ 为仿射正多角形时取到最大值.

证明 首先，对一个固定的 p，由紧致性可知必存在一个 N 角形 $\mathfrak{G}_1$ 使

$$\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}_1)\Big/\sum\nolimits_1(\mathfrak{G}_1)=\max_{\mathfrak{G}}\left\{\sum\nolimits_p(\mathfrak{G})\Big/\sum\nolimits_1(\mathfrak{G})\right\}.\tag{2.26}$$

如果 $\mathfrak{G}_1$ 不是仿射正多角形，作它的对称化 $\overline{\mathfrak{G}}$，由定理 2，$\overline{\mathfrak{G}}$ 不是平面正多角形. 对 $\overline{\mathfrak{G}}$ 运用定理 S（弦的伸展定理）可得平面凸多角形 $\mathfrak{G}^*$ 使

$$\sum\nolimits_1(\mathfrak{G}^*)=\sum\nolimits_1(\overline{\mathfrak{G}});$$

$$\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}^*)>\sum\nolimits_p(\overline{\mathfrak{G}}),\ 1<p\leqslant\frac{N}{2}.\tag{2.27}$$

另一方面由对称化的定义可得

$$\sum\nolimits_1(\overline{\mathfrak{G}})=\sum\nolimits_1(\mathfrak{G}_1),\ \sum\nolimits_p(\overline{\mathfrak{G}})=\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}_1).\tag{2.28}$$

结合(2.27)就有

$$\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}^*)\Big/\sum\nolimits_1(\mathfrak{G}^*)>\sum\nolimits_p(\mathfrak{G}_1)\Big/\sum\nolimits_1(\mathfrak{G}_1).\tag{2.29}$$

此与(2.26)矛盾. 故 $\mathfrak{G}_1$ 必须是仿射正多角形.

而且，这时 $\mathfrak{G}_1$ 的对称化 $\overline{\mathfrak{G}}$ 是正多角形，对正多角形而言比值 $\sum_p/\sum_1$ 是很容易计算的，经简单计算我们有

$$\max_{\mathfrak{G}}\left\{\sum\nolimits_p(\mathfrak{G})\Big/\sum\nolimits_1(\mathfrak{G})\right\}$$

$$=\begin{cases}\left(\sin\dfrac{p\pi}{N}\Big/\sin\dfrac{\pi}{N}\right)^2, & \text{当 } 1<p<\dfrac{N}{2}\text{ 时}, \\ 1/2\sin^2\dfrac{\pi}{N}, & \text{当 } p=\dfrac{N}{2}\text{ 时}.\end{cases} \tag{2.30}$$

例 2 设多角形 $\mathfrak{G}$ 的顶点的重心为 $\boldsymbol{r}_0$，诸顶点到 $\boldsymbol{r}_0$ 的距离平方和

$$I(\mathfrak{G})=\sum_{k=1}^{N}|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_0|^2, \tag{2.31}$$

叫做 $\mathfrak{G}$ 的中心矩. $\mathfrak{G}$ 各边平方和仍然如例 1 那样用 $\sum_1(\mathfrak{G})$ 表示. B. H. Neumann[5]曾经证明

$$\sum\nolimits_1\geqslant 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right)I, \tag{2.32}$$

这个结果很容易从(2.30)推出. 因为熟知有

$$I=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|^2, \tag{2.33}$$

从而

$$\frac{I}{\sum_1}=\frac{1}{N}\sum_{p=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]}\left(\frac{\sum_p}{\sum_1}\right)\leqslant\frac{1}{2N}\sum_{p=1}^{N}\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{N}}{\sin\frac{\pi}{N}}\right)^2=\frac{1}{4\sin^2\frac{\pi}{N}}. \tag{2.34}$$

即 $\sum_1\geqslant 2\left(1-\cos\frac{2\pi}{N}\right)I$，等号成立的充要条件是：$\mathfrak{G}$ 是一个仿射正多角形. Neumann 也给出了一个等号成立的充要条件，二者的等价性似乎并非一目了然的.

例 3 每边长为 1 的等边 N 角形，它的中心矩不超过 $N/4\sin^4\frac{\pi}{N}$. 这可以从(2.32)直接推出. 广而言之，总周长为 L 的等边 N 角形，其中心矩不超过 $L^2/4N\sin^2\frac{\pi}{N}$. 即

$$I \leqslant \frac{L^2}{4N\sin^2\frac{\pi}{N}}, \tag{2.35}$$

等号成立的充要条件是，所讨论的多角形是平面正 N 角形.

例 4 设 $\mathfrak{G}$ 是每边长为$\frac{L}{N}$的等边 N 角形，令

$$d(p,\mathfrak{G}) = \min_i |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-p}| \tag{2.36}$$

表示 $\mathfrak{G}$ 的跨度为 p 的弦的最小值. [3]中猜想有

$$d(p,\mathfrak{G}) \leqslant \frac{L}{N}\sin\frac{\pi p}{N}/\sin\frac{\pi}{N}, \tag{2.37}$$

等号当且仅当 $\mathfrak{G}$ 为平面正 N 角形$\left(每边长为\frac{L}{N}\right)$时成立. 这是 Johnson 的一个猜想[6]的离散形式. [3]中建议用度量平均的方法来处理，但未能完成其证明. 现证明之如下.

将 $\mathfrak{G}$ 的所有跨度为 p 的弦的二阶平均记为

$$\overline{d}(p,\mathfrak{G}) = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_{i-p}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.38}$$

在所有边长为$\frac{L}{N}$的等边 N 角形中，由紧致性，必存在一个 $\mathfrak{G}_1$ 使得

$$\overline{d}(p,\mathfrak{G}_1) = \max_{\mathfrak{G}}\{\overline{d}(p,\mathfrak{G})\}. \tag{2.39}$$

然后作 $\mathfrak{G}_1$ 的对称化 $\overline{\mathfrak{G}}$. 如果 $\mathfrak{G}_1$ 不是平面正 N 角形(又非菱形)，则由定理 3，$\overline{\mathfrak{G}}$ 必定不是平面多角形. 于是由定理 S(弦的伸展定理)一定存在一个平面凸 N 角形 $\mathfrak{G}^*$，它的每边长为$\frac{L}{N}$而其余各对角线都严格大于 $\overline{\mathfrak{G}}$ 中对应的对角线；从而有

$$\overline{d}(p,\mathfrak{G}_1) = \overline{d}(p,\overline{\mathfrak{G}}) < \overline{d}(p,\mathfrak{G}^*). \tag{2.40}$$

这说明 $\overline{d}(p,\mathfrak{G}_1) < \max_{\mathfrak{G}}\{\overline{d}(p,\mathfrak{G})\}$，与(2.39)矛盾. 故 $\mathfrak{G}_1$ 必须是平面正则多角形或菱形，对这两种情况显然都有(经直接计算)

$$\overline{d}(p,\mathfrak{G}_1)=\frac{L}{N}\sin\frac{\pi p}{N}/\sin\frac{\pi}{N}. \tag{2.41}$$

又因显然有 $d(p,\mathfrak{G})\leqslant\overline{d}(p,\mathfrak{G})$，故所要之结果得证. 事实上可以证明更强的结论

$$d(p,\mathfrak{G})\leqslant\frac{L}{N}\sin\frac{\pi p}{N}/\sin\frac{\pi}{N},$$

当且仅当 $\mathfrak{G}$ 是一个平面正 N 角形或者菱形时等号成立.

§3 连续型度量和与对称化

为了处理连续型度量和（其定义见(1.7)与度量平均（其定义见(1.9))，需要事先作一些准备. 一个项数为 d 的点列

$$\mathfrak{G}=\{\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_d\},$$

通常叫做是“占有最广位置”的，如果其凸包 $\mathrm{conv}\mathfrak{G}$ 是一个 $d-1$ 维的非退化单形.

定义一个实函数 $V(\mathfrak{G})=V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_d)$ 如下：当 $\mathfrak{G}$ 占有最广位置时，令

$$V(\mathfrak{G})=\mathrm{conv}\mathfrak{G}\text{ 的 } d-1 \text{ 维体积};$$

否则令 $V(\mathfrak{G})=0$. 这样定义的 V 显然是 d 个变元 $(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_d)$ 的连续函数.

引理 1 对于一族依赖于连续单参数的点列 $\mathfrak{G}(t)=\{\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\cdots,\boldsymbol{r}_d(t)\}$，$\alpha<t<\beta$，我们有

$$V^{\frac{2}{d-1}}\left(\int_\alpha^\beta\mathfrak{G}(t)dt\right)\geqslant\int_\alpha^\beta V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}(t))dt. \tag{3.1}$$

这里的记号 $\int_\alpha^\beta\mathfrak{G}(t)dt$ 表族 $\{\mathfrak{G}(t)\}$ 的度量和.

证明 首先，对于两个点列的度量和 $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2$，如果 $\mathfrak{G}_1,\mathfrak{G}_2$ 占有最广位置的话，文[10]的 *Th.* 1* 证明了

$$V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2)\geqslant V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}_1)+V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}_2); \tag{3.2}$$

由连续性，当 $\mathfrak{G}_1$ 或 $\mathfrak{G}_2$ 退化（不占有最广位置）时(3.2)式仍然成立. 进而可以推出

$$V^{\frac{2}{d-1}}\left(\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{G}_k\right)\geqslant\sum_{k=1}^{m}V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}_k). \tag{3.3}$$

然后通过一般的极限过程就可以得到

$$V^{\frac{2}{d-1}}\left(\int_{\alpha}^{\beta}\mathfrak{G}(t)dt\right)\geqslant\int_{\alpha}^{\beta}V^{\frac{2}{d-1}}(\mathfrak{G}(t))dt,$$

证毕.

定理 4 设 $\mathfrak{G}=\int_{\alpha}^{\beta}\mathfrak{G}(t)dt$，令

$$n=\sup_{\alpha<t<\beta}\{\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}(t))\}, \tag{3.4}$$

并设 $\forall\, t\in(\alpha,\beta)$，点列 $\mathfrak{G}(t)$ 的第一点都落在原点，则 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G})=n$ 的充要条件是：存在着一个点列 $\mathfrak{G}(t_1)\in\{\mathfrak{G}(t)\mid\alpha<t<\beta\}$ 和一族线性映射 $L_t:E^n\to E^n$ 使得

$$L_t(\mathfrak{G}(t_1))=\mathfrak{G}(t),\alpha<t<\beta. \tag{3.5}$$

将条件(3.5)表述得详细些就是：若令

$$\mathfrak{G}(t)=\{\boldsymbol{r}_1(t),\boldsymbol{r}_2(t),\cdots,\boldsymbol{r}_N(t)\},$$

则有

$$L_t(\boldsymbol{r}_i(t_1))=\boldsymbol{r}_i(t),i=1,2,\cdots,N,\alpha<t<\beta. \tag{3.6}$$

证明 充分性的证明可以由定理 1 取极限而得到，事属显然. 下面是必要性的证明.

由于维数 dim 只取离散值，故(3.4)中的上确界必能取到，即存在 $t_1\in(\alpha,\beta)$ 使

$$\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}(t_1))=n. \tag{3.7}$$

假如有一个数 $t_2\in(\alpha,\beta)$ 使得把 $\mathfrak{G}(t_1)$ 映为 $\mathfrak{G}(t_2)$ 的线性映射不存在，我们将证明这种情况下有 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G})>n$.

由于 $\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{G}(t_2)))\leqslant\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{G}(t_1)))=n$，我们可以找到 $\mathfrak{G}(t_1)$ 一个含 $n+2$ 项的子列

$$\mathfrak{G}'(t_1)=\{\boldsymbol{r}_{i_1}(t_1),\boldsymbol{r}_{i_2}(t_1),\cdots,\boldsymbol{r}_{i_{n+2}}(t_1)\},\qquad(3.8)$$

它与 $\mathfrak{G}(t_1)$ 占有相同维数空间($\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}'(t_1))=n$),并且使得,把 $\mathfrak{G}'(t_1)$ 映为 $\mathfrak{G}(t_2)$ 中相应子列

$$\mathfrak{G}'(t_2)=\{\boldsymbol{r}_{i_1}(t_2),\boldsymbol{r}_{i_2}(t_2),\cdots,\boldsymbol{r}_{i_{n+2}}(t_2)\}\qquad(3.9)$$

的线性映射 $L:E^n\to E^n$ 不存在.

对 $\mathfrak{G}'(t_1)$ 和 $\mathfrak{G}'(t_2)$ 应用定理 1,得到

$$\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{G}'(t_1)+\mathfrak{G}'(t_2)))>n.\qquad(3.10)$$

但是,$n+2$ 个点占有的最广位置不过是 $n+1$ 维空间,故 $\mathfrak{G}'(t_1)+\mathfrak{G}'(t_2)$ 占有最广位置,即其凸包 $\mathrm{conv}(\mathfrak{G}'(t_1)+\mathfrak{G}'(t_2))$ 是 E^{n+1} 中非退化单形而有

$$V(\mathfrak{G}'(t_1)+\mathfrak{G}'(t_2))>0,\qquad(3.11)$$

这里 V 是前面定义过的 $n+2$ 元实函数.

现在取一个足够小的正数 $\delta>0$,使得区间 $\Delta_1=[t_1-\delta,t_1+\delta]$ 和 $\Delta_2=[t_2-\delta,t_2+\delta]$ 都含在 (α,β) 中而且 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$. 并令 $\Delta_3=(\alpha,\beta)\backslash\{\Delta_1\cup\Delta_2\}$.

又置

$$\mathfrak{G}'(t)=\{\boldsymbol{r}_{i_1}(t),\boldsymbol{r}_{i_2}(t),\cdots,\boldsymbol{r}_{i_{n+2}}\}\qquad(3.12)$$

作其度量和 $\mathfrak{G}'=\int_\alpha^\beta\mathfrak{G}'(t)dt$,将 $\mathfrak{G}'$ 分为三:

$$\mathfrak{G}'=\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2+\mathfrak{G}_3,\qquad(3.13)$$

其中 $\qquad\mathfrak{G}_k=\int_{\Delta_k}\mathfrak{G}'(t)dt,k=1,2,3.$

经过换元

$$\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2=\int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta}(\mathfrak{G}'(t)+\mathfrak{G}'(t+t_2-t_1))dt.\qquad(3.14)$$

对(3.14)应用引理 1(在(3.1)中置 $d=n+2$)有

$$V^{\frac{2}{n+1}}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2) \geqslant \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} V^{\frac{2}{n+1}}(\mathfrak{G}'(t)+\mathfrak{G}'(t+t_2-t_1))dt. \tag{3.15}$$

右端积分号下的被积函数

$$\varphi(t)=V^{\frac{2}{n+1}}(\mathfrak{G}'(t)+\mathfrak{G}'(t+t_2-t_1))$$

是 t 的非负连续函数，而且由(3.11)有

$$\varphi(t_1)=V^{\frac{2}{n+1}}(\mathfrak{G}'(t_1)+\mathfrak{G}'(t_2))>0, \tag{3.16}$$

故其积分必取正值. 于是由(3.15)得到

$$V(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2)>0, \tag{3.17}$$

即 $\mathrm{conv}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2)$ 是 E^{n+1} 中非退化单形，也即

$$\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2))=n+1.$$

从而 $\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G})\geqslant\dim(\mathrm{conv}\mathfrak{G}')\geqslant\dim(\mathrm{conv}(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2))>n$.

证毕.

作为定理 4 的推论，前节中的系 1、2、3 都可以平行推广到连续型，就不必一一证明了. 今后在应用中，可对连续型度量和或度量平均直接引用系 1、2、3.

定义 设 C 是一条可求长的闭曲线，其参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$. 我们把 Hilbert 空间中一条闭曲线 $\bar{C}$: $\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{\boldsymbol{r}}(t)$, $(0\leqslant t<T)$ 叫做曲线 C 按参数 t 的"对称化"，如果有关系

$$|\bar{\boldsymbol{r}}(t_1)-\bar{\boldsymbol{r}}(t_2)|^2=\frac{1}{T}\int_0^T|\boldsymbol{r}(t_1+t)-\boldsymbol{r}(t_2+t)|^2dt \tag{3.18}$$

对区间 $[0,T]$ 中的一切 t_1,t_2 都成立(注意：将 $\boldsymbol{r}(t)$ 视为以 T 为周期的函数，于是它对一切 $t\in(-\infty,+\infty)$ 都有意义).

这样的对称化的存在性是早已解决了的问题[1,3]. 此外从(3.18)可以看到，弦长 $|\bar{\boldsymbol{r}}(t_1)-\bar{\boldsymbol{r}}(t_2)|$ 只依赖于 t_1-t_2. 这样的曲线 $\bar{C}$ 正是 Von Neumann[7] 和 Schoenberg 用分析工具研究过的 Hilbert 空间中的闭螺旋线，其对称群是一个单参数连续群.

定理 5 设 C 是一条可求长的平面闭曲线，其参数表示为 $\boldsymbol{r}$

$-\boldsymbol{r}(t)$，$(0\leqslant t\leqslant T)$. 又令 $\overline{C}$：$\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ 是 C 按参数 t 的对称化. 则 $\overline{C}$ 为平面曲线的充要条件是：

(i) C 是一个椭圆；

(ii) 参数 t 是 C 的"仿射弧长"的线性函数.

证明 必要性. 设 $\overline{C}$ 是平面曲线，我们来证明，对每一个固定的 u 值，$\boldsymbol{r}(t)\mapsto\boldsymbol{r}(t+u)$ 都是曲线 C 到自身的一个仿射对应. 如果不是这样，则能找到 C 上的 4 个不共线的点 $\boldsymbol{r}(t_1)$，$\boldsymbol{r}(t_2)$，$\boldsymbol{r}(t_3)$，$\boldsymbol{r}(t_4)$ 和某个数 $u_0\in[0,T]$，使得 $\boldsymbol{r}(t_k)\mapsto\boldsymbol{r}(t_k+u_0)$（其中 $k=1,2,3,4$）不是线性对应. 那么由定理 4，点列族

$$\mathfrak{G}(u)=\{\boldsymbol{r}(t_1+u),\boldsymbol{r}(t_2+u),\boldsymbol{r}(t_3+u),\boldsymbol{r}(t_4+u)\}\quad(0\leqslant u\leqslant T)\tag{3.19}$$

的度量平均 $\overline{\mathfrak{G}}=\frac{1}{T}\int_0^T\mathfrak{G}(u)du$

肯定不是平面四角形. 从另一方面看，曲线 $\overline{C}$ 上的点列 $\{\overline{\boldsymbol{r}}(t_1),\overline{\boldsymbol{r}}(t_2),\overline{\boldsymbol{r}}(t_3),\overline{\boldsymbol{r}}(t_4)\}$ 合同于 $\overline{\mathfrak{G}}$，（这是根据(3.18)），故 $\overline{C}$ 不可能是平面曲线. 这与所设矛盾. 由此可见，对每一个固定的 u 值，$\boldsymbol{r}(t)\mapsto\boldsymbol{r}(t+u)$ 都是曲线 C 到自身的一个仿射对应. 再由系 3 通过极限过程容易证明，映射 $\boldsymbol{r}(t)\mapsto\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ 也是一个仿射对应，这对应将曲线 C 仿射地映到其对称化曲线 $\overline{C}$ 上.

前面已经讲过，闭曲线的对称化一定是 Von Neumann[7]意义下的闭螺旋线，而平面上的闭螺旋线只有圆，因而 $\overline{C}$ 必定是一个圆. 既然已经证明 C 是 $\overline{C}$ 的仿射象，故 C 是椭圆，(i)成立.

如果一条可求长曲线 $\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ 的弦长 $|\overline{\boldsymbol{r}}(t_1)-\overline{\boldsymbol{r}}(t_2)|$ 只依赖于参数值的差 t_1-t_2，这曲线（已知是一螺旋线）的弧长必然是参数 t 的线性函数，这是[7]中 Theorem 4 结论的一部分.

这样，我们这个定理中的对称化曲线 $\overline{C}$：$\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(t)$ 的参数 t 应当是 $\overline{C}$ 的弧长 s 的线性函数. 已知 $\overline{C}$ 是一个圆，一个圆的弧长 s 为其仿射弧长 λ 的线性函数（按仿射弧长的定义，见[8,9]. 对于足够光

滑的曲线，$\lambda=\int_0^t k^{\frac{1}{3}}(s)ds$，其中 $k(s)$ 是曲线的曲率函数）．于是，$\overline{C}$ 的仿射弧长 λ 是参数 t 的线性函数．

又在仿射对应下，曲线的仿射弧长只改变一个常数倍．既然 C 是 $\overline{C}$ 的仿射象，$\boldsymbol{r}(t)\mapsto\overline{\boldsymbol{r}}(t)$是仿射对应，故 C 的仿射弧长也应为 t 的线性函数．(ii)成立．

充分性比较显然，故略去．

证毕．

定理 6 设 C 是一条可求长的平面闭曲线，其弧长参数表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，$(0\leqslant s\leqslant L)$．又令 $\overline{C}:\overline{\boldsymbol{r}}=\overline{\boldsymbol{r}}(s)$是 C 按参数 s 的对称化，则 $\overline{C}$ 为平面曲线的充要条件是：C 是一个圆．

证明 充分性十分显然，一个圆的按弧长参数的对称化必合同于自身．

必要性．如果 $\overline{C}$ 是平面曲线，由定理 4（只用到必要性部分），C 必是一个椭圆而且参数 s 是仿射弧长 λ 的线性函数．注意到 s 是弧长参数，我们有（令 $k(s)$表示 C 的曲率函数）

$$\int_0^s k^{\frac{1}{3}}(s)ds=\lambda=as+b. \tag{3.20}$$

微分之得到 $k(s)=a^3$，即 C 是一个圆．

证毕．

这个定理对于应用而言是比较方便的．以 Herda 在[6]中提及（后来 Alexander 又在[3]中提到）的 Johnson 的一个猜想为例，我们将用对称化的方法借助定理 6 进行处理．

例 5（Johnson 猜想） 设 $\boldsymbol{r}(s)$是闭曲线 C 的自然参数表示，曲线长度为 L，又设 σ 是一个确定的正数，$0<\sigma<L$．考虑曲线上那些长度为 σ 的弧所张的弦的最小值，

令

$$f(\sigma,C)=\min_s|\boldsymbol{r}(s+\sigma)-\boldsymbol{r}(s)|. \tag{3.21}$$

则有

$$f(\sigma,C)\leqslant\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi\sigma}{L}, \tag{3.22}$$

等号成立当且仅当 C 是一个圆.

为证明此命题,我们可以引用下面的

定理 S^* (G. T. Sallee[4]) 设 $C:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ 是一条可求长闭曲线,$0\leqslant s\leqslant L$. 如果 C 不是平面凸曲线,则必存在一条平面凸闭曲线 $C^*:\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(s)$,$0\leqslant s\leqslant L$,使得 C^* 与 C 有相等的长度 L,而且

$$|\boldsymbol{r}(s_1)-\boldsymbol{r}(s_2)|<|\boldsymbol{r}^*(s_1)-\boldsymbol{r}^*(s_2)| \tag{3.23}$$

对一切 $s_1\neq s_2$,$0\leqslant s_1<L$,$0\leqslant s_2<L$ 都成立.

应该指出,Sallee 只对(3.23)证明了不等号 $\leqslant$ 成立,但不难证明,代之以严格的不等号 $<$ 时,定理也是真的.

例 5 的证明:不等式(3.22)可以由这问题的离散模型,例 4 的(2.37)通过极限过程得到. 剩下的问题是求证等号成立的条件.

圆能够使(3.22)取得等号,这无论是由直接计算或通过极限过程都是显而易见的. 下面我们假定 C 不是圆,往证 $f(\sigma,C)$ 不能取到最大值.

按 C 的弧长参数 s 作对称化 $\overline{C}:\bar{\boldsymbol{r}}=\bar{\boldsymbol{r}}(s)$,由定理 6,$\overline{C}$ 不是平面曲线. 再由定理 S^*,存在着一条与 $\overline{C}$ 等长的曲线 $C^*:\boldsymbol{r}^*=\boldsymbol{r}^*(s)$,使得

$$|\bar{\boldsymbol{r}}(s+\sigma)-\bar{\boldsymbol{r}}(s)|<|\boldsymbol{r}^*(s+\sigma)-\boldsymbol{r}^*(s)| \tag{3.24}$$

对一切 $\sigma\in(0,L)$ 都成立. 注意到 $|\bar{\boldsymbol{r}}(s+\sigma)-\bar{\boldsymbol{r}}(s)|$ 仅与 σ 有关而与 s 无关,故有

$$|\bar{\boldsymbol{r}}(s+\sigma)-\bar{\boldsymbol{r}}(s)|<\min_s|\boldsymbol{r}^*(s+\sigma)-\boldsymbol{r}^*(s)|=f(\sigma,C^*). \tag{3.25}$$

仍参照对称化的定义(3.18),我们有

$$f(\sigma,C)=\min_s|\boldsymbol{r}(s+\sigma)-\boldsymbol{r}(s)|$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{L}\int_0^L |r(s+\sigma) - r(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= |\bar{r}(s+\sigma) - \bar{r}(s)| < f(\sigma, C^*). \qquad (3.26)$$

这说明 $f(\sigma,C)<f(\sigma,C^*)\leqslant\frac{L}{\pi}\sin\frac{\pi\sigma}{L}$,即 C 不能使(3.22)取等号.例 5 证毕.

作者曾在[11]中用 Fourier 展开的方法给出一个别证.但此处的证法阐明对称化概念的效用.

参考文献

[1]Alexander, R., Pac. J. of Math., 85:1(1979), 1—9.

[2]Alexander, R., Geometriae Dedicada, 6(1977), 87—94.

[3]Alexander, R., Metric embedding techniques applied to geometric inequalities, in The geometry of metric and linear spaces, Ed. L. M. Kelly, Springer-Verlag, 1975, 57—65.

[4]Sallee, G. T., Geometriae Dedicada, 2(1974), 311—317.

[5]Neumann, B. H., J. London Math. Soc., 16(1941), 230—245.

[6]Herda, H., Amer. Math. Monthly, 81(1974), 146—149.

[7]von Neumann, J. and Schoenberg, L. J., Trans. Amer. Math. Soc., 50(1941), 226—251.

[8]苏步青,仿射微分几何,科学出版社,北京,1982.

[9]Blashke, W., Vorlesungen uber Differentialgeometrie II, Chelsea, New york, 1967.

[10]Yang Lu and Zhang Jing-zhong, Kexue Tongbao, 27:7(1982), 699—703.

[11]杨路、张景中,关于空间曲线 Johnson 的猜想,科学通报,6(1984),329—333.

研究文献索引*

[1]杨路、张景中，关于有限点集的一类几何不等式，数学学报，23：5(1980)，740—749.

[2]张景中、杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，11：2(1981)，1—8.

[3]杨路、张景中，预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件，数学学报，26：2(1983)，250—256.

[4]杨路、张景中，Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及其应用，数学学报，24：3(1981)，401—408.

[5]杨路、张景中，关于 Alexander 的一个猜想，科学通报，27：1(1982)，1—3.

[6]杨路、张景中，度量方程应用于 Sallee 猜想，数学学报，26：4(1983)，488—493.

[7]杨路、张景中，伪对称集与有关的几何不等式，数学学报，29：6(1986)，802—806.

[8]杨路、张景中，双曲型空间紧致集的覆盖半径，中国科学(A辑)，NO. 8(1982)，683—692.

[9]张景中、杨路、杨孝春，初等图形在欧氏空间的实现问题，中国科学(A辑)，NO. 9(1992)，933—941.

[10]杨路、张景中，关于空间曲线的 Johnson 猜想，科学通报，30：6(1984)，329—333.

---

* 这里仅列出了国内学者关于"高维空间几何不等式"的主要研究论文，由杨世国整理.

[11]张景中、杨路，度量嵌入的几何判准与歪曲映象，数学学报，29：5(1986).

[12]杨路、张景中，度量和与 Alexander 对称化，数学年刊，8A：2(1987).

[13]杨路、张景中，抽象距离空间的秩的概念，中国科学技术大学学报，10：4(1980)，52—65.

[14]杨路、张景中，非欧双曲几何的若干度量问题 I 等角嵌入和度量方程，中国科学技术大学学报(数学专辑)，Vol. 13(1983)，123—134.

[15]杨路、张景中，高维度量几何的两个不等式，成都科技大学学报，NO. 4(1981)，63—70.

[16]杨路、张景中，单纯形构造定理的一个证明，数学的实践与认识，NO. 1(1980)，43—45.

[17]Yang Lu and Zhang Jingzhong, A Geometric Proof of an Algebraic Theorem, J. China Univ. Sci. Technol. 11：4(1981)，127—130.

[18]Yang Lu and Zhang Jingzhong, A generalisation to several dimensions of the Neuberg-Pedoe inequality with applications, Bull. Austral Math. Soc.，27(1983)，203—214.

[19]张景中、杨路，有限点集在伪欧空间的等长嵌入，数学学报，24：4(1981)，481—487.

[20]杨路、张景中、曾振柄，最初的几个 Heilbronn 数的猜想和计算，数学年刊，13：A4(1992)，503—515.

[21]杨路、张景中、曾振柄，关于三角形区域的 Heilbronn 数，数学学报，37：5(1994)，678—689.

[22]杨路、张景中，关于凸体的一个不等式的简单证明，数学学报，29：1(1983).

[23]Yang Lu, Zhang Jingzhong, Metric equations in geometry

and their applications. Internat centre for Théor Phys Miramare Trieste, NO. 281(1989), 18.

[24]陈计、马援,涉及两个单形的一类不等式,数学研究与评论,9:2(1989),282—284.

[25]王振、陈计,OYZ 不等式的初等证明,宁波大学学报,6:2(1993),25—27.

[26]Mitrinović. D. S., Pečarić. J. E, Volenec. V, Chen Ji, Addenda to the Monograph "Recent Advences in Geometric Inequalities", I, Journal of Ningbo University, 4:2(1991), 79—145.

[27]左铨如、毛其吉,关于伪对称集的一个注记,科学通报,32:19(1987),1441—1443.

[28]左铨如、毛其吉,M. S. Klamkin 问题的推广,科学通报,32:1(1987).

[29]毛其吉,左铨如,切点单形的一个几何不等式,数学的实践与认识,NO. 4(1987),71—75.

[30]毛其吉,左铨如,切于已知球的单形的宽度,数学研究与评论,9:1(1989),14—16.

[31]毛其吉,联系两个单形的不等式,数学的实践与认识,NO. 3(1989),23—25.

[32]左铨如,E^n 中 p 维与 q 维平面间的夹角公式,数学杂志,10:2(1990),171—177.

[33]毛其吉,关于"度量加"的一个不等式,数学杂志,9:2(1988),129—134.

[34]左铨如,具有费马点的单形的性质与 Erdös-Mordell 不等式的高维推广,扬州师院学报,NO. 3(1992),26—32.

[35]张垚,n 维单形中的距离公式和距离不等式,湖南教育学院学报,NO. 1(1988),22—30.

[36]张垚，关于 n 维单形体积的两个不等式，数学的实践与认识，NO. 4(1988)，71—74.

[37]张垚，Veljan-Korchmaros 不等式的改进，数学杂志，NO. 4 (1990).

[38]张垚，两道数学竞赛题的推广，湖南数学通讯，NO. 1(1988).

[39]张垚，关于单形的一个猜想，湖南教育学院学报，NO. 5 (1990)，119—123.

[40]Zhang Yao, The Formulas and Inequalities for the Volumes of n-simplex, Mathematical Olympiad in China, Hunan Education Publishing House, 1990, 126—152.

[41]Zhany Yao, Inequality for the Volumes Associated with Three n-simplexes, Hunan Annals of Mathematics, NO. 1—2(1990)，57—61.

[42]张垚，关于垂足单形的一个猜想，系统科学与数学，12：4 (1992)，371—375.

[43]张垚、林祖成，联系若干个单形体积的两个不等式，湖南教育学院学报，NO. 5(1993)，13—18.

[44]张垚，E^n 中 S 面空间角的正弦定理及其应用，湖南教育学院学报，NO. 5(1993)，101—107.

[45]张垚，涉及单形中线长的两个几何不等式，湖南教育学院学报，NO. 5(1994).

[46]陈培德，点集的伪径与布阵点数，科学通报，37：17(1992)，1627.

[47]郭曙光，关于单形的一个猜想及两个不等式，扬州师院学报，12：4(1992)，23—27.

[48]郭曙光，超球内接凸多胞形的一个构造定理，扬州师院学报，13：2(1993)，4—9.

[49]周加农，共球诸点相互距离之间的一个不等式，科学通报，33

: 14(1988),1045—1047.
[50]刘立、周加农,一个经典不等式的高维推广,数学季刊,3:2(1988),99--103.
[51]周加农,伪对称集的一个充分必要条件,数学研究与评论,10:1(1990),65--68.
[52]周加农,惯量等轴的一类充分必要条件,西南民族学院学报,18:4(1992),375—377.
[53]周加农,度量平均与伪对称集,西南民族学院学报,19:2(1993),136—138.
[54]张晗方,单形中的一类不等式,数学的实践与认识,NO.3(1984),39—48.
[55]蒋星耀,关于高维单形顶点角的不等式,数学年刊,8A:6(1987),668—670.
[56]苏化明,多边形等周问题的矩阵证数,数学的实践与认识,NO.1(1984).
[57]苏化明,关于单形的两个不等式,科学通报,NO.1(1987),1—3.
[58]苏化明,预给二面角的单形嵌入 E^n 的充分必要条件的一个应用,数学杂志,NO.1(1987),11—14.
[59]苏化明,与单形重心有关的几个几何不等式,数学季刊,NO.1(1989),31--37.
[60]苏化明,切点单形的一个几何不等式的再证明,数学的实践与认识,NO.1(1990).
[61]苏化明,关于切点单形的两个不等式,数学研究与评论,NO.2(1990),243—247.
[62]苏化明,与单形外接球心有关的一个不等式,数学季刊,NO.2(1992).
[63]苏化明,关于单形二面角平分面面积的不等式,数学杂志,

NO. 3(1992),315—318.

[64]苏化明,一个涉及单形体积、棱长及侧面面积的不等式,数学杂志,NO. 4(1993),453—455.

[65]苏化明,关于单形的三角不等式,数学研究与评论,NO. 4(1993),599—604.

[66]苏化明,共球有限点集的一类几何不等式,数学年刊,15A:1(1994),46—49.

[67]苏化明,单形内顶角的不等式及其应用,数学杂志,NO. 3(1994),357—362.

[68]苏化明,关于度量加的一个定理及一个矩阵不等式,数学研究与评论,NO. 2(1994),315—318.

[69]杨世国、王佳,关于有限点集的两个定理,西南师范大学学报,NO. 3(1992),286—292.

[70]杨世国、王佳,涉及两个单形的一类几何不等式,西南师范大学学报,NO. 3(1991),295—298.

[71]王佳、杨世国,球面型空间中的 Pappus 定理与 Desargues 定理,西南师范大学学报,NO. 2(1993),230—233.

[72]杨世国,球面型空间中伪对称集的两个几何特征与有关的一个几何不等式,数学杂志,NO. 4(1992),361—367.

[73]杨世国,共超球质点系的一个结果及其应用,数学杂志,NO. 1(1994),97—100.

[74]杨世国,单形的构造定理,数学季刊,NO. 4(1991),102—103.

[75]Yang Shiguo, Extensions of Klamkin's Theorem, Northeastern Mathematical Journal, NO. 4(1991),424—427.

[76]杨世国,E^n 中 Euler 不等式的推广,数学杂志,NO. 4(1991),470—474.

[77]杨世国,关于切点单形两个不等式的推广,数学研究与评论,NO. 4(1993),629—630.

[78]王佳、杨世国，关于 n 维单形的宽度，西南师范大学学报，NO. 1(1993)，6—9.
[79]王佳、杨世国，高维情形的 Vasic 定理及其应用，西南师范大学学报，NO. 2(1994)，123—127.
[80]杨世国、冯德民，高维单形的一类新结果，陕西师范大学学报，NO. 2(1993)，83—85.
[81]杨世国、沈文选，E^n 中 Finsler-Hadwiger 不等式的探讨，湖南师范大学学报，NO. 4(1992)，314—318.
[82]杨世国，三维欧氏空间中的 Vasic 定理，数学通报，NO. 12(1993)，33—35.
[83]杨世国，王庚，单形的一个几何不等式的两个推广，海南大学学报，NO. 2(1994)，99—102.
[84]王庚、杨世国，预给二面角的单形在 E^n 中的嵌入，安徽师范大学学报，NO. 4(1994)，11—16.
[85]杨世国，有限点集在球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中的不共面等长嵌入的充分必要条件和单形的又一构造定理，安徽教育学院学报，NO. 2(1989)，1—8.
[86]杨国世，关于 Sallee 问题与 Klamkin 问题，安徽教育学院学报，NO. 2(1990)，6—13.
[87]杨世国，关于 n 维空间角一个定理的证明与推广，安徽教育学院学报，NO. 1(1991)，1—4.
[88]杨世国，关于球面型空间 $S_{n-1,1}$ 中有限点集间的球面距离和 E^n 中单形二面角的性质，安徽教育学院学报，NO. 1(1990)，1—8.
[89]杨世国，关于切点单形一个定理的简单证明，安徽教育学院学报，NO. 2(1988)，4—7.
[90]杨世国，预给棱长的单形在 n 维欧氏空间 E^n 中的嵌入，安徽教育学院学报，NO. 1(1992)，1—4.

[91]杨世国,关于单纯形的两个几何不等式,安徽教育学院学报,NO. 1(1989),15—18.

[92]杨世国,关于"度量加"与切点单形的几个结果,安徽教育学院学报,NO. 2(1994),1--7.

[93]杨世国,关于 Sallee-Alexander 不等式的改进,甘肃教育学院学报,NO. 1(1994),1—4.

[94]杨世国,联系二个 n 维单形的几何不等式,四川教育学院学报,NO. 4(1991),88- 90.

[95]杨世国,M. S. Klamkin 问题的再推广,吉林教育学院学报,NO. 3- 4(1992),68- 71.

[96]杨世国,E^n 中的两个几何不等式定理,上海教育学院学报,NO. 4(1993),38--42.

[97]杨世国,n 维单形体积的两个不等式定理,天津教育学院学报,NO. 3(1991),36 —39.

[98]杨世国、黄保军,关于单形两个不等式的推广,淮北煤炭师范学院学报,NO. 1(1994),11- 14.

[99]杨世国、黄保军,联系两个单形的两个几何不等式,淮北煤炭师范学院学报,NO. 2(1992),4 - 9.

[100]杨世国、黄保军,高维 Finsler Hadwger 不等式及其应用,淮北煤炭师范学院学报,NO. 1(1992),15 -19.

[101]杨世国,关于切点单形几个结果的改进,江西教育学院学报,NO. 5(1994),11—15.

[102]杨世国、王庚,关于几个几何结果的注记,安徽机电学院学报,NO. 2(1993),11--14.

[103]Leng Gangsong, A Matrix Inequality with Weights and Its Applications, Linear Algebra Appl, 185(1993),273—278.

[104]冷岗松,高维单形二面角的正弦定理及平分面的两个不等式,数学研究与评论,NO. 1(1994),157—158.

[105]冷岗松,关于 n 维单形的一个不等式,数学研究与评论,NO. 4(1990),522—523.

[106]冷岗松,关于超平行体的几个不等式,数学研究与评论,NO. 3(1987),428—430.

[107]冷岗松,关于 k 级顶点角的正弦定理及应用,数学杂志,NO. 3(1993),357—359.

[108]冷岗松,Hadmard 不等式一个推广的加强,数学的实践与认识,NO. 2(1986),78—81.

[109]冷岗松,关于 Hadmard 不等式的一个推广,湖南科大学报,NO. 2(1987),53—55.

[110]冷岗松,预给内角的超平行体嵌入 E^n 的充要条件,湖南教育学院学报,NO. 2(1992),34—36.

[111]冷岗松,E^n 中欧拉不等式的一些推广,上海铁道学院学报,NO. 3(1993),41—47.

[112]唐立华,涉及 n 维单形体积的两个不等式,湖南教育学院学报,NO. 5(1993),158—162.

[113]熊倩,关于 Neuberg-Pedoe 不等式高维推广的一个注记,数学季刊,6:3(1991),77—80.

[114]古汉宏,关于垂足单形的几个定理,扬州师院学报,9:2(1989),16—19.

[115]王庚、王敏生,关于 k 个单形的一类几何不等式,安徽师大学报,16:3(1993),27—29.

[116]尹景尧、陈奉教,关于联系两个单形的几何恒等式及应用,数学进展,21:3(1992),325—328.

[117]尹景尧,Wolstenholme 不等式的高维推广及应用,曲阜师范大学学报,NO. 3(1992),13—17.

[118]尹景尧,关于单纯形的一类三角不等式及高维正弦定理的改进,数学的实践与认识,NO. 1(1987),46—51.

[119]尹景尧、冯渭川,关于空间角正弦的一个不等式及其应用,数学的实践与认识,NO. 3(1988),51—56.

[120]尹景尧、冯渭川,两个不等式的推广,数学的实践与认识,NO. 4(1994),75—76.

[121]尹景尧,有关 n 阶行列式的两个不等式及 R^n 中平行多面体的体积极值问题,数学通报,NO. 2(1983),25—28.

[122]朱秉林、刘根洪,E^n 空间中 r 维单形的定比分点公式,辽宁师范大学学报,NO. 4(1981),2—6.

[123]刘根洪,关于高维球的两个定理,苏州大学学报,NO. 1(1983),55—59.

[124]刘根洪,关于 n 维单形体积不等式的一个定理,数学的实践与认识,NO. 4(1986),38—43.

[125]刘根洪、张晗方,有限个单形间的几个不等式,苏州大学学报,NO. 3(1987),339—343.

[126]刘根洪,高维余弦定理及正弦定理,苏州大学学报,NO. 2(1989),119—124.

[127]刘根洪,E^n 中 n 维单形外接超球面的半径,苏州大学学报,NO. 1(1990),1—5.

[128]林祖成、刘根洪,关于一个猜想的注记,苏州大学学报,NO. 4(1992),411—414.

[129]林祖成,关于 N 维单形的一类不等式,数学的实践与认识,NO. 2(1994),50—56.

[130]林祖成,关联四面体棱切球半径的一个不等式链,数学通讯,NO. 7(1993),24—26.

[131]林祖成,再论切点单形不等式,玉溪师专学报,NO. 3(1991),135—140.

[132]林祖成,再论四面体的棱切球,蒙自师专学报,NO. 2(1994),52—57.

[133]林祖成，四面体的棱切球半径的计算公式，湖南数学通讯，NO. 2(1992)，39.

[134]林祖成，划分 n 维单形体积的最小值问题，成都大学学报，NO. 2(1992)，13—15.

[135]郭之盈、林祖成，关于 n 维单形的一个不等式，枣庄师专学报，NO. 4(1991)，5—7.

[136]张在明、林祖成，一个几何定理的高维推广，蒙自师专学报，NO. 4(1990)，115—120.

[137]王志诚、林祖成，关于 n 维单形的一组不等式，蒙自师专学报，NO. 3(1991)，72—78.

[138]林祖成、郭之盈，四面体棱切球的几个问题，济宁教育学院学报，NO. 2(1992)，13—16.

[139]陈瑞琛，格拉斯曼代数与勾股定理，扬州师院学报，NO. 1(1984)，23—26.

[140]Yang Shiguo, Two theorems on volume and dihedral Angles of an n-dimensional simplex, 数学季刊，8：2(1993)，84—93.

[141]Yang Shiguo, Three geometric inequalities for a simplex, Geometriae Dedicata, vol. 57(1995), 105—110.

[142]Yang Shiguo, An inequality for a simplex and its applications, Geometriae Dedicata, Vol. 55(1995), 195—198.

[143]Yang Shiguo, Wang Jia, Improvements of n-dimensional Euler inequality, Journal of Geometry, Vol. 51(1995), 190—195.

[144]Yang Shiguo, Wang Geng, A class of geometric inequalities in the spherical space, Pure and Applied Math, Vol. 11(1995), 79—80.